

Proyecto MaTeX

Logaritmos

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

© 2004 javier.gonzalez@unican.es
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

LOGARITMOS

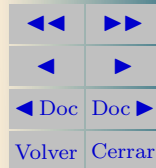


Tabla de Contenido

1. Introducción

2. Logaritmo de un número

2.1. Propiedades

- Logaritmo de un producto
- Logaritmo de un cociente
- Logaritmo de una potencia
- Logaritmo de un radical
- Ejercicios
- Cambio de base

3. Ecuaciones logarítmicas

4. Unos cuantos acertijos..

5. Aplicaciones

5.1. La intensidad del sonido

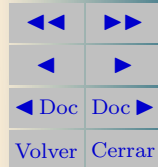
Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests



MaTeX

LOGARITMOS



1. Introducción

En los siglos XVI y XVII se vió la necesidad de establecer reglas que permitieran simplificar los laboriosos cálculos que tenían que realizar los astrónomos.

La invención de los logaritmos al comienzo del siglo XVII trajo consigo un enorme ahorro de tiempo. John Napier, o Neper en latín, presentó las primeras tablas de logaritmos en 1614, aunque por no estar en el sistema decimal no fueron de utilidad; Briggs las mejoró presentándolas en forma decimal. Muchas mejoras se hicieron después de estas tablas, aunque todas contenían como una parte esencial los logaritmos de las funciones goniométricas, como Neper lo hizo.

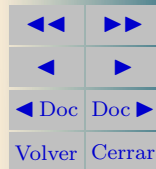
Los logaritmos fueron empleados durante muchos años en todas las ciencias, pero la Astronomía se benefició de ellos más que ninguna otra.

La invención de los ordenadores ha llevado consigo aumentar el tiempo de vida de los últimos astrónomos al no tener que utilizar tampoco las tablas de logaritmos. Pero ellos, los logaritmos, han hecho posibles muchas investigaciones que, por culpa de su inmenso trabajo computacional, no hubieran sido posibles sin su ayuda.



MaTEX

LOGARITMOS



2. Logaritmo de un número

Definición 2.1 Se denomina logaritmo en base $a > 0$ del número a^n al exponente n de la base a . Se escribe como

$$\log_a a^n = n$$

Ejemplo 2.1. Veamos algunos ejemplos sencillos:

Solución:

$$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$$

$$\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$$

$$\log_{16} 16 = \log_{16} 16^1 = 1$$

$$\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

$$\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$$

$$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$$

□

Es decir para hallar el logaritmo de un número en base a expresamos el número como una potencia de la base a .

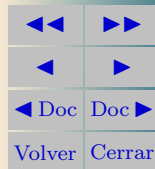
Veamos algunos ejemplos más. Para hallar $\log_2 \frac{1}{4}$ expresamos $\frac{1}{4}$ como una potencia de 2,

$$\frac{1}{4} = (2)^{-2} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{4} = -2$$



MaTEX

LOGARITMOS





Para hallar $\log_3 \frac{1}{81}$ expresamos $\frac{1}{81}$ como una potencia de 3,

$$\frac{1}{81} = (3)^{-4} \Rightarrow \log_3 \frac{1}{81} = -4$$

Ejemplo 2.2. Hallar el logaritmo de 1 en base a .

Solución: El logaritmo de 1 es cero en cualquier base.

$$\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$$

□

Ejemplo 2.3. Hallar el logaritmo de 0 en base a .

Solución: El logaritmo de 0 no existe, pues 0 no se puede poner como una potencia de a

□

Ejemplo 2.4. Hallar el valor de $\log_{10} 5$.

Solución:

Como 5 no sabemos expresarlo como potencia de 10, no podemos hacerlo directamente. En estos casos acudimos a una calculadora.

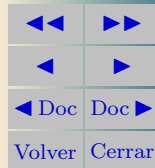
Con su calculadora o la incorporada en el ordenador podemos hallarla

$$\log_{10} 5 \approx 0,69897$$

□

MaTeX

LOGARITMOS



Ejemplo 2.5. Expresa el número 6 como un logaritmo en base 2

Solución: Por la definición

$$6 = \log_2 2^6$$



Ejemplo 2.6. Expresa el número 2 como un logaritmo en base 12

Solución: Por la definición

$$2 = \log_{12} 12^2$$



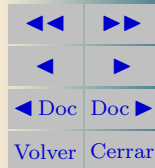
Ejercicio 1. Completa en tu cuaderno la tabla siguiente:

| | | | | | | | | |
|----------------|---|---|---|----------------|---|---------------|----|----|
| n | 1 | 2 | 4 | $\frac{1}{16}$ | | | | |
| $\log_2 n$ | | | | | 8 | $\frac{1}{2}$ | -2 | -3 |
| $\log_{1/2} n$ | | | | | | | | |



MaTeX

LOGARITMOS





Test. Hallar los siguientes logaritmos:

1. $\log_2 32$ vale...

(a) 5

(b) 6

(c) 4

2. $\log_4 4$ vale...

(a) 4

(b) 0

(c) 1

3. $\log_2 1$ vale...

(a) 2

(b) 1

(c) 0

4. $\log_{25} 5$ vale...

(a) -1

(b) $1/2$

(c) 2

5. $\log_3 81$ vale...

(a) 3

(b) 4

(c) 5

6. $\log_5 \frac{1}{5}$ vale...

(a) -1

(b) $1/2$

(c) 1

7. $\log_{10} 1000$ vale...

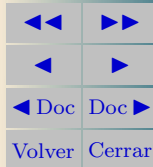
(a) 2

(b) 3

(c) 4

MaTeX

LOGARITMOS





2.1. Propiedades

• Logaritmo de un producto

Si comparamos

$$\log_a a^x + \log_a a^y = \quad = x + y$$

$$\log_a (a^x \cdot a^y) = \log_a (a^{x+y}) = x + y$$

obtenemos la propiedad de que el logaritmo del producto de dos números es la suma de los logaritmos de dichos números.

$$\log_a (m n) = \log_a m + \log_a n \quad (1)$$

• Logaritmo de un cociente

Si comparamos

$$\log_a a^x - \log_a a^y = \quad = x - y$$

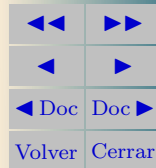
$$\log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a (a^{x-y}) = x - y$$

obtenemos la propiedad de que el logaritmo del cociente de dos números es la resta de los logaritmos de dichos números.

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n \quad (2)$$

MaTeX

LOGARITMOS





• Logaritmo de una potencia

De la expresión

$$\begin{aligned}\log_a(M)^n &= \log_a(\overbrace{M \cdot M \cdot M \cdots M}^{n \text{ veces}}) && \text{regla del producto} \\ &= \log_a M + \log_a M + \cdots + \log_a M \\ &= n \cdot \log_a M\end{aligned}$$

obtenemos la propiedad de que el logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base.

$$\boxed{\log_a M^n = n \cdot \log_a M} \quad (3)$$

• Logaritmo de un radical

La expresión anterior se aplica a los radicales

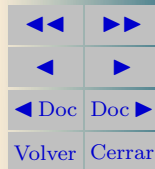
$$\begin{aligned}\log_a \sqrt[n]{M} &= \log_a (M)^{1/n} && \text{radical} \\ &= \frac{1}{n} \log_a M && \text{potencia}\end{aligned}$$

obtenemos la propiedad de que el logaritmo de una raíz es el índice por el logaritmo del radicando.

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \cdot \log_a M} \quad (4)$$

MaTeX

LOGARITMOS



PROPIEDADES DEL LOGARITMO

$$\log(m \cdot n) = \log(m) + \log(n)$$

Producto

$$\log \frac{m}{n} = \log(m) - \log(n)$$

Cociente

$$\log m^n = n \cdot \log m$$

Potencia

Ejemplo 2.7. A partir de $\log_{10} 5 \approx 0,69897$ calcular $\log_{10} 125$

Solución:

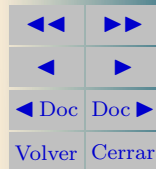
$$\log_{10} 125 = \log_{10} 5^3 = 3 \log_{10} 5 = 3 \times 0,69897 \approx 2,0969$$

□



MaTeX

LOGARITMOS



Ejemplo 2.8. A partir de $\log_{10} 5 \approx 0,69897$ calcular $\log_{10} \sqrt[3]{5}$

Solución:

$$\log_{10} \sqrt[3]{5} = \log_{10} 5^{1/3} = \frac{1}{3} \log_{10} 5 = \frac{1}{3} \times 0,69897 \approx 0,233$$

Ejemplo 2.9. Desarrollar la expresión $\log_a x^2 3y$

Solución:

$$\begin{aligned} \log_a x^2 3y &= \log_a x^2 + \log_a 3 + \log_a y \\ &= 2 \log_a x + \log_a 3 + \log_a y \end{aligned}$$

Ejemplo 2.10. Desarrollar la expresión $\log_a \frac{4x}{y^2}$

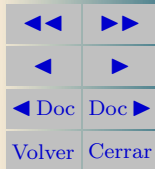
Solución:

$$\begin{aligned} \log_a \frac{4x}{y^2} &= \log_a 4x - \log_a y^2 \\ &= \log_a 4 + \log_a x - \log_a y^2 \\ &= \log_a 4 + \log_a x - 2 \log_a y \end{aligned}$$



MaTEX

LOGARITMOS





Ejemplo 2.11. Desarrollar la expresión $\log_a \frac{x^3 3y}{\sqrt{z}}$

Solución:

$$\begin{aligned} \log_a \frac{x^3 3y}{\sqrt{z}} &= \log_a (x^3 3y) - \log_a \sqrt{z} \\ &= \log_a x^3 + \log_a 3y - \log_a \sqrt{z} \\ &= 3 \log_a x + \log_a 3 + \log_a y - \frac{1}{2} \log_a z \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.12. Agrupa en un solo logaritmo la expresión

$$\log_a b + 2 \log_a c - \log_a d$$

Solución:

$$\begin{aligned} \log_a b + 2 \log_a c - \log_a d &= \log_a b + \log_a c^2 - \log_a d \\ &= \log_a \frac{b c^2}{d} \end{aligned}$$

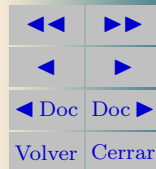
□

Ejemplo 2.13. La siguiente fórmula expresa el capital final C obtenido en un banco a partir del capital inicial c_0 a un interés i en un tiempo t . Despejar la incógnita t aplicando logaritmos.

$$C = c_0(1 + i)^t$$

MaTEX

LOGARITMOS





Solución:

$$\log C = \log c_o(1 + i)^t$$

$$\log C = \log c_o + t \log(1 + i)$$

$$\log C - \log c_o = t \log(1 + i)$$

$$\frac{\log C - \log c_o}{\log(1 + i)} = t$$

□

Ejemplo 2.14. Resuelve la ecuación siguiente $2^x = 5$

Solución: Aplicamos logaritmos

$$\log 2^x = \log 5 \Rightarrow x \log 2 = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2} = 2,3219$$

□

Ejemplo 2.15. Resuelve la ecuación siguiente $3^x = 7$

Solución: Aplicamos logaritmos

$$\log 3^x = \log 7 \Rightarrow x \log 3 = \log 7 \Rightarrow x = \frac{\log 7}{\log 3} = 1,7712$$

□

MaTEX

LOGARITMOS





• Ejercicios

Ejercicio 2. Desarrolla los siguientes logaritmos:

$$a) \log \frac{m n}{p}$$

$$b) \log \frac{c d^2}{n^3}$$

$$c) \log \frac{1}{x^3 y^2}$$

Ejercicio 3. Desarrolla los siguientes logaritmos:

$$a) \log \sqrt[3]{a f^2}$$

$$b) \log \frac{1}{62 \cdot 8^{-x}}$$

$$c) \log \frac{m + n}{p}$$

Ejercicio 4. Agrupar los siguientes logaritmos:

$$a) \log x - \log y + \log z$$

$$b) \log 4 - 3 \log x + \frac{1}{2} \log 5$$

$$c) 3 \log a - 4 \log b$$

Ejercicio 5. Agrupar los siguientes logaritmos:

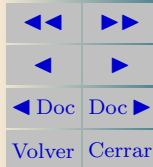
$$a) 5 \log_a x + 3 \log_a y - 2 \log_a z$$

$$b) \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{3} \log b + \frac{3}{2} \log c$$

$$c) 2 - 3 \log y$$

MaTeX

LOGARITMOS



• Cambio de base

Si se conoce el logaritmo de un número en la base a , la pregunta es saber cuánto vale el el logaritmo del número en otra base b , es decir:

$$\log_a N = n \implies \log_b N = x$$

Como

$$\begin{aligned} b^x &= N \implies \log_a b^x = \log_a N \implies \\ x \log_a b &= \log_a N \implies x = \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} \end{aligned}$$

$$\boxed{\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}} \quad (5)$$

Es útil, pues en tu calculadora tienes el logaritmo en base 10. Si queremos calcular el logaritmo de 35 en base 3, procedemos de la forma:

$$\log_3 35 = \frac{\log_{10} 35}{\log_{10} 3} = \frac{1,5441}{0,4771} \approx 3,2362$$

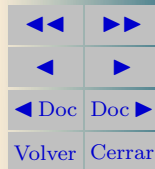
Ejercicio 6. Aplica la expresión (5) para hallar con la calculadora:

$$\log_2 1500 \quad \log_5 200 \quad \log_{100} 200 \quad \log_{100} 40$$



MaTeX

LOGARITMOS



3. Ecuaciones logarítmicas

Una **ecuación logarítmica** es aquella en la que aparece el logaritmo de la incógnita, o de una expresión de ella. Por ejemplo

$$\log x = \log 7 \implies x = 7 \quad \blacktriangleleft \text{unicidad}$$

La propiedad de la unicidad indica que dos números distintos no pueden tener el mismo logaritmo, es decir

$$\text{Si } \log A = \log B \implies A = B \quad \text{unicidad}$$

Para resolver ecuaciones, como técnica general, se agrupa para obtener un solo logaritmo en cada miembro y se eliminan los logaritmos por la propiedad de unicidad. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 3.1. Resolver la ecuación $\log 2x + \log 5 = 1$

Solución: Agrupamos en ambos miembros, teniendo en cuenta que $1 = \log 10$

$$\log 2x + \log 5 = 1$$

$$\log 2x + \log 5 = \log 10 \quad \blacktriangleleft \text{definición}$$

$$\log(2x \cdot 5) = \log 10 \quad \blacktriangleleft \text{producto}$$

$$10x = 10 \quad \blacktriangleleft \text{unicidad}$$

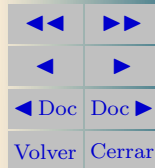
$$x = \boxed{1}$$

□



MaTEX

LOGARITMOS





Ejemplo 3.2. Resolver la ecuación $2 \log x - \log(x + 6) = 1$

Solución:

$$2 \log x - \log(x + 6) = 1$$

$$2 \log x - \log(x + 6) = \log 10$$

◀ definición

$$\log \frac{x^2}{x + 6} = \log 10$$

◀ cociente

$$\frac{x^2}{x + 6} = 10$$

◀ unicidad

$$x^2 = 10x + 60$$

◀ operando

$$x^2 - 10x - 60 = 0 \implies x = \frac{10 + \sqrt{340}}{2}$$

◀ resolviendo

La solución $x = \frac{10 - \sqrt{340}}{2}$ no sirve, pues en la ecuación inicial quedaría el logaritmo de un número negativo que no existe. \square

EJERCICIO 7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a) $\log_x 125 = 3$

(b) $\log x = 3 \log 5$

(c) $\log x^2 = -2$

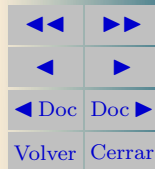
(d) $\log_x \frac{1}{9} = -2$

(e) $5 \log 2x = 20$

(f) $\log_5 x = 4$

MaTEX

LOGARITMOS





EJERCICIO 8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a) $\log x = 3$

(b) $\log x + \log 4 = 0$

(c) $\log x = 4 \log 2$

(d) $\log x - \log 2 = 2$

(e) $\log 2x + \log 5 = 6$

(f) $2 \log x = \log(-6 + 5x)$

(g) $\log(x + 1) - 1 = \log x$

(h) $2 \log x - \log(x + 6) = 1$

(i) $\log 3 + \log(x + 1) = 1$

(j) $\log_2(x^2 - 1) - \log_2(x + 1) = 1$

(k) $2 \log^2 x - 9 \log x = -10$

(l) $3 \log x - \log(2x^2 + x - 2) = 0$

EJERCICIO 9. Resuelve los siguientes sistemas con logaritmos:

(a)
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ \log x + \log y = \log 8 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x + y = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} \log x + \log y = \log 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} 2 \log x - 3 \log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} 4 \log x - 3 \log y = -1 \\ \log(xy) = 5 \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 60 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$$

(g)
$$\begin{cases} \log_x(4 - y) = \frac{1}{2} \\ \log_y(4 + x) = 2 \end{cases}$$

(h)
$$\begin{cases} xy = 1 \\ \log_7 x - \log_7 y = 4 \end{cases}$$

MaTEX

LOGARITMOS





4. Unos cuantos acertijos..

Test. El log 125 es igual a

- (a) $100 \log 1,25$ (b) $5 \log 3$ (c) $3 \log 25$
 (d) $3 - 3 \log 2$ (e) $\log 25 \log 5$

Test. Halla la expresión reducida de

$$\log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{d} - \log \frac{ay}{dx}$$

- (a) $\log \frac{y}{x}$ (b) $\log \frac{x}{y}$ (c) 1 (d) 0 (e) $\log \frac{a^2y}{d^2x}$

Test. ¿Cuál es el valor de $[\log_{10}(5 \log_{10} 100)]^2$?

- (a) $\log_{10} 50$ (b) 25 (c) 10 (d) 2 (e) 1

Test. Resolver la ecuación $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0$?

- (a) 0 (b) 64 (c) 10 (d) 1 (e) 24

MaTeX

LOGARITMOS





5. Aplicaciones

5.1. La intensidad del sonido

El sonido, como es una onda, transporta energía y esa energía llega al tímpano, que es una membrana que tiene una determinada superficie.

Al tímpano llega energía por cada cm^2 (lee centímetro cuadrado). Este concepto de energía por cm^2 , recibe el nombre de potencia (y se mide en watt). Ahora, para que un sonido sea apenas audible la potencia deber ser 10^{-16} watt y el sonido más fuerte que puede oír el hombre, sin sentir dolor, corresponde a una potencia 10^{-4} watt.

Estos números son difíciles de comprender, por lo que se ha creado una escala para medir niveles del sonido en una unidad llamada decibelio (dB); decibelio se deriva del nombre del inventor Alexander Graham Bell.

El nivel de sonoridad L de un sonido medida en **decibelios** se define como

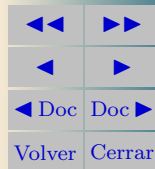
$$L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$$

donde I es la intensidad.

La siguiente tabla muestra el nivel de sonoridad en decibelios y la intensidad en watts de varios sonidos típicos.

MaTeX

LOGARITMOS





| Niveles Sonoros Típicos en decibelios | | |
|---------------------------------------|------------|-------------|
| Tipo de sonido | Decibelios | Intensidad |
| Umbral de la audición | 0 | 10^{-12} |
| Murmullo | 20 | 10^{-10} |
| Conversación | 60 | 10^{-6} |
| Tráfico | 80 | 10^{-4} |
| Moto | 100 | 10^{-2} |
| Discoteca | 95 | $10^{-2,5}$ |
| Umbral de dolor | 120 | 1 |
| Despegue de un reactor | 140 | 10^2 |

Por encima de 120 decibelios se produce dolor.

Ejemplo 5.1. Si por ejemplo tenemos al lado dos motos con una sonoridad de 100 decibelios cada una, ¿cuál es la sonoridad total?.

Solución: La respuesta no es 200, pues la sonoridad no es aditiva ya que es una suma de logaritmos. Se suman las intensidades. Como 100 dB corresponde a una intensidad de 10^{-2} watt

$$\begin{aligned}
 10 \log \frac{10^{-2} + 10^{-2}}{10^{-12}} &= 10 \log(2 \times 10^{10}) \\
 &= 10 \times 10,301 \\
 &= 103,01 \text{ decibelios}
 \end{aligned}$$

□

MaTeX

LOGARITMOS



Ejemplo 5.2. ¿Cuántas motos habría que poner juntas para superar los 120 decibelios, si por ejemplo cada moto tiene una sonoridad de 100 decibelios?.

Solución: Sea n el número de motos necesarias. Como 100 dB corresponde a una intensidad de 10^{-2} watt, la intensidad de las n motos corresponde a $n 10^{-2}$ watt, luego

$$\begin{aligned} 10 \log \frac{n 10^{-2}}{10^{-12}} &= 120 \\ 10 \log(n 10^{10}) &= 120 \\ \log(n 10^{10}) &= 12 = \log 10^{12} \\ n 10^{10} &= 10^{12} \\ n &= 100 \text{ motos} \end{aligned}$$

□

¿A partir de que niveles el sonido es perjudicial?

Es muy recomendable utilizar, siempre que sea posible, protectores para los oídos por encima de los 100 dB .

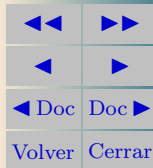
Si la exposición es prolongada, por ejemplo en puestos de trabajos, se considera necesario el utilizar protectores en ambientes con niveles de 85 dB.

Los daños producidos en el oído por exposiciones a ruidos muy fuertes son **acumulativos** e **irreversibles**, por lo que se deben de extremar las precauciones. De la exposición prolongada a ruidos se observan trastornos nerviosos, cardiacos y mentales.



MaTeX

LOGARITMOS



Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

| | | | | | | | | |
|----------------|---|----|---|----------------|-----|----------------|---------------|---------------|
| n | 1 | 2 | 4 | $\frac{1}{16}$ | 256 | $\sqrt{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |
| $\log_2 n$ | 0 | 1 | 2 | -4 | 8 | $\frac{1}{2}$ | -2 | -3 |
| $\log_{1/2} n$ | 0 | -1 | 2 | 4 | -8 | $-\frac{1}{2}$ | 2 | 3 |

Ejercicio 1



MaTeX

LOGARITMOS





Ejercicio 2.

a)

$$\log \frac{m n}{p} = \log(m n) - \log p \quad \blacktriangleleft \text{cociente}$$

$$= \log m + \log n - \log p \quad \blacktriangleleft \text{producto}$$

b)

$$\log \frac{c d^2}{n^3} = \log(c d^2) - \log n^3 \quad \blacktriangleleft \text{cociente}$$

$$= \log c + \log d^2 - \log n^3 \quad \blacktriangleleft \text{producto}$$

$$= \log c + 2 \log d - 3 \log n \quad \blacktriangleleft \text{potencia}$$

c)

$$\log \frac{1}{x^3 y^2} = \log 1 - \log(x^3 y^2) \quad \blacktriangleleft \text{cociente}$$

$$= 0 - \log x^3 - \log y^2 \quad \blacktriangleleft \text{producto}$$

$$= -3 \log x - 2 \log y \quad \blacktriangleleft \text{potencia}$$

MaTeX

LOGARITMOS





Ejercicio 3.

a)

$$\begin{aligned} \log \sqrt[3]{a f^2} &= \frac{1}{3} \log(a f^2) && \blacktriangleleft \text{potencia} \\ &= \frac{1}{3} \log a + \frac{1}{3} \log f^2 && \blacktriangleleft \text{producto} \\ &= \frac{1}{3} \log a + \frac{2}{3} \log f && \blacktriangleleft \text{potencia} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{62 \cdot 8^{-x}} &= \log 1 - \log(62 \cdot 8^{-x}) && \blacktriangleleft \text{cociente} \\ &= 0 - \log 62 - \log 8^{-x} && \blacktriangleleft \text{producto} \\ &= -\log 62 + x \log 8 && \blacktriangleleft \text{potencia} \end{aligned}$$

c)

$$\log \frac{m+n}{p} = \log(m+n) - \log p \quad \blacktriangleleft \text{cociente}$$

Nota.- $\log(m+n) \neq \log m + \log n$

MaTEX

LOGARITMOS



Ejercicio 3

**Ejercicio 4.**

a)

$$\begin{aligned}\log x - \log y + \log z &= \log(xz) - \log y &< \text{producto} \\ &= \log \frac{xz}{y} &< \text{cociente}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\log 4 - 3 \log x + \frac{1}{2} \log 5 &= \log 4 - \log x^3 + \log \sqrt{5} &< \text{potencia} \\ &= \log(4\sqrt{5}) - \log x^3 &< \text{producto} \\ &= \log \frac{4\sqrt{5}}{x^3} &< \text{cociente}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}3 \log a - 4 \log b &= \log a^3 - \log b^4 &< \text{potencia} \\ &= \log \frac{a^3}{b^4} &< \text{cociente}\end{aligned}$$

MaTEX

LOGARITMOS

Ejercicio 4



**Ejercicio 5.**

a)

$$5 \log_a x + 3 \log_a y - 2 \log_a z = \log_a x^5 + \log_a y^3 - \log_a z^2 \quad \blacktriangleleft \text{potencia}$$

$$= \log \frac{x^5 y^3}{z^2} \quad \blacktriangleleft \text{prod. y coc.}$$

b)

$$\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{3} \log b + \frac{3}{2} \log c = \log \sqrt{a} + \log \sqrt[3]{b} + \log \sqrt{c^3} \quad \blacktriangleleft \text{potencia}$$

$$= \log(\sqrt{a} \sqrt[3]{b} \sqrt{c^3}) \quad \blacktriangleleft \text{producto}$$

c)

$$2 - 3 \log y = \log 10^2 - 3 \log y \quad \blacktriangleleft \text{definición}$$

$$= \log 10^2 - \log y^3 \quad \blacktriangleleft \text{potencia}$$

$$= \log \frac{10^2}{y^3} \quad \blacktriangleleft \text{cociente}$$

Ejercicio 5

MaTeX

LOGARITMOS



Ejercicio 6.

$$\log_2 1500 = \frac{\log_{10} 1500}{\log_{10} 2} \approx 10,55$$

$$\log_5 200 = \frac{\log_{10} 200}{\log_{10} 5} \approx 3,29$$

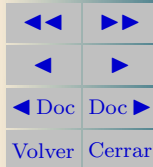
$$\log_{100} 200 = \frac{\log_{10} 200}{\log_{10} 100} \approx 1,15$$

$$\log_5 40 = \frac{\log_{10} 40}{\log_{10} 5} \approx 2,29$$

Ejercicio 6

*MaTeX*

LOGARITMOS



Ejercicio 7(a)Escribimos 3 como $\log_x x^3$, de esta forma

$$\log_x 125 = 3$$

$$\log_x 125 = \log_x x^3$$

$$125 = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{125} = 5$$

◀ definición

◀ unicidad

◀ resolvemos

□

*MaTeX*

LOGARITMOS



Ejercicio 7(b)

$$\log x = 3 \log 5$$

$$\log x = \log 5^3$$

$$x = 5^3$$

$$x = 125$$

◀ potencia

◀ unicidad

□

MaTEX

LOGARITMOS



Ejercicio 7(c)

$$\log x^2 = -2$$

$$\log x^2 = \log 10^{-2}$$

$$x^2 = 10^{-2}$$

$$x^2 = \frac{1}{100}$$

$$x = \pm \frac{1}{10}$$

◀ definición

◀ unicidad

◀ resolvemos

□

*MaTeX*

LOGARITMOS



Ejercicio 7(d)

$$\log_x \frac{1}{9} = -2$$

$$\log_x \frac{1}{9} = \log_x x^{-2}$$

◀ definición

$$\frac{1}{9} = x^{-2}$$

◀ unicidad

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{9}$$

◀ resolvemos

$$x = \boxed{3}, -3$$

El valor -3 no es válido pues los logaritmos se toman de base positiva.

□



MaTeX

LOGARITMOS



Ejercicio 7(e)

$$5 \log 2x = 20$$

$$\log 2x = 4$$

$$\log 2x = \log 10^4$$

$$2x = 10^4$$

$$x = 5000$$

◀ simplificar

◀ definición

◀ unicidad

□

MaTEX

LOGARITMOS



Ejercicio 7(f)

$$\log_5 x = 4$$

$$\log_5 x = \log_5 5^4$$

$$x = 5^4$$

$$x = \boxed{625}$$

◀ definición

◀ unicidad

□

MaTEX

LOGARITMOS



Ejercicio 8(a)

Para poder quitar logaritmos escribimos 3 como $\log 10^3$, de esta forma

$$\log x = 3$$

$$\log x = \log 10^3$$

$$x = 10^3 = 1000$$

□

*MaT_EX*

LOGARITMOS



Ejercicio 8(b)

Para poder quitar logaritmos escribimos 0 como $\log 1$, de esta forma

$$\log x + \log 4 = 0$$

$$\log x + \log 4 = \log 1$$

$$\log 4x = \log 1$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

□

**MaTEX****LOGARITMOS**

Ejercicio 8(c)

$$\log x = 4 \log 2$$

$$\log x = \log 2^4$$

$$x = 2^4 = 16$$



□

MaT_EX

LOGARITMOS



Ejercicio 8(d)

$$\log x - \log 2 = 2$$

$$\log \frac{x}{2} = \log 10^2$$

$$\frac{x}{2} = 10^2$$

$$x = 200$$

□

*MaTeX*

LOGARITMOS



Ejercicio 8(e)

$$\log 2x + \log 5 = 6$$

$$\log(2x)(5) = \log 10^6$$

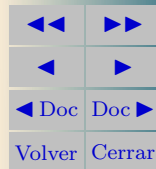
$$x = 10^5$$



□

MaTEX

LOGARITMOS



Ejercicio 8(f)

$$2 \log x = \log(-6 + 5x)$$

$$\log x^2 = \log(-6 + 5x)$$

$$x^2 = (-6 + 5x)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \implies x = 2 \vee 3$$

□

**MaTEX****LOGARITMOS**

Ejercicio 8(g)

$$\log(x + 1) - 1 = \log x$$

$$\log(x + 1) - \log 10 = \log x$$

$$\log \frac{x + 1}{10} = \log x$$

$$\frac{x + 1}{10} = x$$

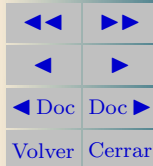
$$-9x = -1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

□

MaTEX

LOGARITMOS



Ejercicio 8(h)

$$2 \log x - \log(x + 6) = 1$$

$$2 \log x - \log(x + 6) = \log 10$$

$$\log \frac{x^2}{x + 6} = \log 10$$

$$\frac{x^2}{x + 6} = 10$$

$$x^2 = 10x + 60$$

$$x^2 - 10x - 60 = 0 \implies x = \frac{10 + \sqrt{340}}{2}$$

□

*MaTeX*

LOGARITMOS



Ejercicio 8(i)

$$\log 3 + \log(x + 1) = 1$$

$$\log 3(x + 1) = \log 10$$

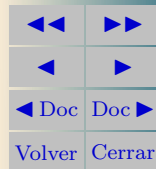
$$3(x + 1) = 10$$

$$x = \frac{7}{3}$$

□

*MaTeX*

LOGARITMOS



Ejercicio 8(j)

$$\log_2(x^2 - 1) - \log_2(x + 1) = 1$$

$$\log_2 \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \log_2 2$$

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x = \boxed{2} \vee -1$$

El valor -1 no es válido pues en la ecuación inicial quedaría $\log_2 0$ que no existe.

□

*MaTeX*

LOGARITMOS



Ejercicio 8(k)

$$2 \log^2 x - 9 \log x = -10$$

$$2 \log^2 x - 9 \log x + 10 = 0$$

resolvemos la ecuación de segundo grado

$$\log x = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$\log x = \frac{5}{2} \implies \boxed{x = 10^{5/2}}$$

$$\log x = 2 \implies \boxed{x = 10^2}$$

□



MaTeX

LOGARITMOS



Ejercicio 8(1)

$$3 \log x - \log(2x^2 + x - 2) = 0$$

$$\log \frac{x^3}{2x^2 + x - 2} = \log 1$$

$$\frac{x^3}{2x^2 + x - 2} = 1$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

resolvemos la ecuación de tercer grado por Ruffini

$$\boxed{x = 1} \quad x = -1 \quad \boxed{x = 2}$$

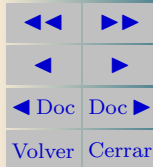
el valor $x = -1$ no es válido pues en la ecuación inicial quedaría logaritmo de un número negativo.

□



MaTeX

LOGARITMOS





Ejercicio 9(a) Agrupamos y eliminamos logaritmos en la segunda ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ \log x + \log y = \log 8 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ \log x \cdot y = \log 8 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ x \cdot y = 8 \end{array} \right\}$$

Por sustitución

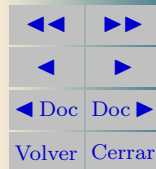
$$y = 6 - x \quad x(6 - x) = 8 \quad \text{resolviendo}$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \quad y = 4 \\ x = 4 \quad y = 2 \end{array} \right.$$

□

MaTEX

LOGARITMOS





Ejercicio 9(b) Agrupamos y eliminamos logaritmos en la segunda ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y = 11 \\ \log \frac{x}{y} = \log 10 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 11 \\ \frac{x}{y} = 10 \end{array} \right\} \text{Por sustitución}$$

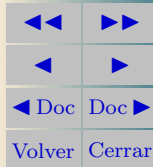
$$x = 10y \Rightarrow 10y + y = 11 \quad \text{resolviendo}$$

$$11y = 11 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

□

MaTeX

LOGARITMOS





Ejercicio 9(c) Agrupamos y eliminamos logaritmos en la primera ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \log x + \log y = \log 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \log x \cdot y = \log 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{array} \right\} \text{Por sustitución}$$

$$y = 3/x \Rightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} = 10 \quad \text{resolviendo}$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3 & y = \pm 1 \\ x = \pm 1 & y = \pm 3 \end{cases}$$

Las soluciones negativas no valen pues en las ecuaciones quedarían logaritmos de números negativos, que no existen. □

MaTEX

LOGARITMOS





Ejercicio 9(d) Agrupamos y eliminamos logaritmos en la ambas ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \log x - 3 \log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \log \frac{x^2}{y^3} = \log 10^7 \\ \log xy = \log 10 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{y^3} = 10^7 \\ xy = 10 \end{array} \right\}$$

Por sustitución

$$y = 10/x \Rightarrow \frac{x^2 x^3}{10^3} = 10^7 \quad \text{resolviendo}$$

$$x^5 = 10^{10} \Rightarrow x = 10^2 \quad y = \frac{1}{10}$$

□

MaTEX

LOGARITMOS





Ejercicio 9(e) Agrupamos y eliminamos logaritmos en las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 4 \log x - 3 \log y &= -1 \\ \log(xy) &= 5 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \log \frac{x^4}{y^3} &= \log 10^{-1} \\ \log(xy) &= \log 10^5 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{x^4}{y^3} &= 10^{-1} \\ xy &= 10^5 \end{aligned} \right\}$$

◀ sustitución

$$y = \frac{10^5}{x} \Rightarrow x^4 = 10^{-1} \left(\frac{10^5}{x} \right)^3$$

◀ operando

$$x^7 = 10^{14} \Rightarrow \boxed{x = 100 \quad y = 1000}$$

□

MaTeX

LOGARITMOS



Ejercicio 9(f) Agrupamos y eliminamos logaritmos en la segunda ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 60 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 60 \\ \log_2 \frac{x}{y} = \log_2 2^2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 60 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{array} \right\}$$

◀ sustitución

$$x = 4y \Rightarrow 16y^2 - y^2 = 60$$

◀ resolviendo

$$y^2 = 4 \Rightarrow \boxed{y = 2 \quad x = 4}$$

□



MaTEX

LOGARITMOS





Ejercicio 9(g) Agrupamos y eliminamos logaritmos en las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \log_x(4-y) = \frac{1}{2} \\ \log_y(4+x) = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \log_x(4-y) = \log_x x^{\frac{1}{2}} \\ \log_y(4+x) = \log_y y^2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4-y = \sqrt{x} \\ 4+x = y^2 \end{array} \right\}$$

◀ sustitución

$$y = 4 - \sqrt{x} \Rightarrow 4 + x = (4 - \sqrt{x})^2$$

◀ operando

$$8\sqrt{x} = 12 \Rightarrow \boxed{x = \frac{9}{4} \quad y = \frac{5}{2}}$$

□

MaTEX

LOGARITMOS



Ejercicio 9(h) Agrupamos y eliminamos logaritmos en la segunda ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} x y = 1 \\ \log_7 x - \log_7 y = 4 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x y = 1 \\ \log_7 \frac{x}{y} = \log_7 7^4 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x y = 1 \\ \frac{x}{y} = 7^4 \end{array} \right\}$$

◀ sustitución

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 7^4$$

◀ resolviendo

$$x^2 = 7^4 \Rightarrow \boxed{x = 49 \quad y = 1/49}$$

□



MaTEX

LOGARITMOS



Soluciones a los Tests

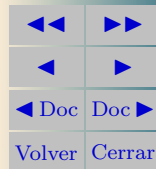
Solución al Test:

$$\log 125 = \log \frac{1000}{8} = \log 1000 - \log 2^3 = 3 - 3 \log 2$$

Final del Test

*MaTEX*

LOGARITMOS



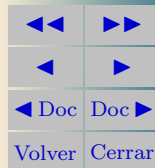
Solución al Test:

$$[\log_{10}(5 \log_{10} 100)]^2 = [\log_{10}(5 \cdot 2)]^2 = 1^2 = 1$$

Final del Test

*MaT_EX*

LOGARITMOS



Solución al Test:

$$\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0 \implies$$

$$\log_3(\log_4 x) = 1 \implies$$

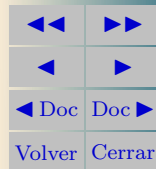
$$\log_4 x = 3 \implies$$

$$x = 4^3 = 64$$

Final del Test

*MaT_EX*

LOGARITMOS



Índice alfabético

cambio de base, 15

ecuaciones, 16

logaritmo, 4

de una raíz, 9

de un cociente, 8

de un producto, 8

de una potencia, 9

unicidad, 16



MaTeX

LOGARITMOS

