Proyecto MaTEX

Inferencia Estadística

Fco Javier González Ortiz

Directorio

D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4

Tabla N(0,1)

◀◀ ▶▶

◀ ▶

◀ Doc Doc ▶

Volver Cerrar

Tabla de Contenido

1. Parámetros y estadísticos

Es fundamental entender la diferencia entre parámetros y estadísticos. Los parámetros se refieren a la distribución de la población y los estadísticos a los datos de las muestras.

Cuando nos referimos a los parámetros los indicamos con letras griegas, así, para la media de una población escribimos μ y para la desviación típica de la población escribimos σ. Sin embargo para los estadísticos de las muestras usamos la notación que vimos en el capítulo de Estadística Descriptiva. Así, para la media de una muestra escribimos $\overline{x}$ y para la desviación típica de la muestra escribimos S_x.

Si por ejemplo decimos que la duración media de las bombillas que fabrica un empresa es de 1600 horas, nos referimos a la población y la media la designamos por $\mu = 1600$. Sin embargo si hallamos la duración media de una muestra de 20 bombillas y obtenemos 1580 horas, nos referimos a la muestra y la media la designamos por $\overline{x}_1 = 1580$.

Podríamos a continuación hallar la duración media de otra muestra de 30 bombillas y obtener 1610 horas, nos referimos a la muestra y la media la designamos por $\overline{x}_2 = 1610$. La media muestral (de las muestras) es una variable aleatoria mientras que la media poblacional es una constante.

- La media μ de la población es un parámetro y es constante.
- La media $\overline{x}$ de la muestra es un estadístico y es una variable aleatoria.

Si por ejemplo decimos que el 42% de los escolares de la comunidad suelen perder al menos un día de clase a causa de gripes y catarros, nos referimos a la población y la proporción la designamos por $p = 0.42$. Sin embargo, si observamos 1000 escolares donde 540 han perdido clase nos referimos a la muestra y la proporción la designamos por $\widehat{p} = 0.54$.

Podríamos a continuación observar otros 500 escolares donde 200 han perdido clase y la proporción de la muestra sería $\widehat{p} = 0.40$. La proporción muestral (de las muestras) es variable aleatoria mientras que la proporción poblacional es constante.

- La proporción p de la población es un parámetro y es constante.
- La proporción $\widehat{p}$ de la muestra es un estadístico y es una variable aleatoria.

Resumen

☞Los parámetros como la media μ, la desviación típica σ o la proporción p son características constantes de una población

☞Los estadísticos como la media $\overline{x}$, la desviación típica S_x o la proporción $\widehat{p}$ son características de las muestras y son variables aleatorias

Realiza el siguiente test sobre los conceptos de parámetro y estadísticos estudiados en la sección anterior

Inicio del Test Contesta las siguientes cuestiones:

1. Con el valor de la media $\overline{x}$ nos referimos a un:

(a) parámetro (b) estadístico (c) ninguno de ellos

2. Con la media μ nos referimos a un:

(a) parámetro (b) estadístico (c) ninguno de ellos

3. El valor de la media $\overline{x}$ es:

(a) constante (b) aleatorio (c) ninguno de ellos

4. El valor de la media μ es:

(a) constante (b) aleatorio (c) ninguno de ellos

5. El valor de la media $\overline{x}$ se refiere a la:

(a) población (b) muestra (c) ninguno de ellos

6. El valor de la desviación típica S_x es:

(a) constante (b) aleatorio (c) ninguno de ellos

Final del Test Puntos:

Realiza el siguiente test sobre los conceptos de parámetro y estadísticos estudiados en la sección anterior

Inicio del Test Contesta las siguientes cuestiones:

1. La proporción $\hat{p}$ es un :

(a) parámetro (b) estadístico (c) ninguno de ellos

2. La proporción $\hat{p}$ es :

(a) constante (b) aleatoria (c) ninguno de ellos

3. La proporción $\hat{p}$ es un :

(a) estimador (b) parámetro (c) ninguno de ellos

4. La proporción p es un :

(a) parámetro (b) estadístico (c) ninguno de ellos

5. La proporción p es :

(a) constante (b) aleatoria (c) ninguno de ellos

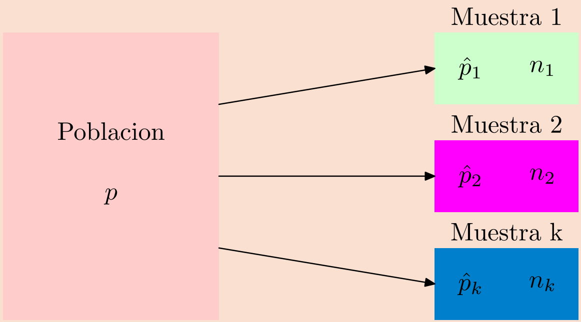
Final del Test Puntos:

2. Distribuciones muestrales

2.1. Distribución muestral de la proporción

Si en una población conocemos la proporción p de los individuos que tienen cierta característica, podemos elegir aleatoriamente muestras de tamaño n y obtener la proporción en cada muestra

$$\boxed{\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de éxitos}}{\text{tamaño de la muestra}}} \tag{1}$$



Como sabes, el nº de éxitos x de una muestra de tamaño n se distribuye de forma binomial $B(n;p)$, luego a partir de aquí vamos a determina la distribución de la variable $\hat{p}$.

MATEMATICAS
2º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Si por ejemplo sabemos que el 40% de los escolares de nuestro instituto tienen ordenador en casa, podemos preguntar aleatoriamente a grupos de tamaño $n = 50$ y obtener la proporción de los que tienen ordenador en cada muestra.

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de éxitos}}{\text{tamaño de la muestra}}$$

Muestra	éxitos	$\hat{p}$
muestra 1	21	$\frac{21}{50} = 0.42$
muestra 2	22	$\frac{22}{50} = 0.44$
...	...	...
muestra k	18	$\frac{18}{50} = 0.36$

Como sabes, el nº de éxitos x de una muestra de tamaño n se distribuye de forma binomial $B(n; p)$, si aproximamos a la normal $N(np; \sqrt{npq})$ y se divide x por n se obtiene que

$$\boxed{\hat{p} \sim N\left(p\ ;\ \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)} \qquad (2)$$

MATEMATICAS 2º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 2.1. En una localidad de 6000 habitantes, la proporción de menores de 16 años es $p = 1/4$.

a) ¿Cuál es la distribución de la proporción de menores de 16 años en muestras de 50 habitantes de dicha población?

b) Halla la probabilidad de que, en una muestra de 50 habitantes, haya entre 15 y 20 habitantes menores de 16 años.

Solución:

a) $p = \dfrac{1}{4} = 0.25 \qquad \hat{p} \sim N\left(0.25\,;\ \sqrt{\dfrac{0.25 \cdot 0.75}{50}}\right)$

b) Siendo $n = 50$, $\mu = np = 12.5$ y $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4}} = 3.06$ se tiene

$$x \sim N(12.5; 3.06)$$

$$\begin{aligned} P(14 \leq x \leq 20) =& P\left(\frac{13.5 - 12.5}{3.06} < z < \frac{20.5 - 12.5}{3.06}\right) \\ =& \Phi\,(2.61) - \Phi\,(0.33) \approx \boxed{0,366} \end{aligned}$$

□

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 2.2. El 42% de los habitantes de un municipio es contrario a la gestión del alcalde y el resto son partidarios de este. Si se toma una muestra de 64 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que ganen los que se oponen al alcalde?

Solución:
Hay que hallar la probabilidad de que la proporción de la muestra sea superior al 0.5, es decir $\hat{p} = \dfrac{x}{64} > 0.5$ o equivalentemente, que el número de los que se oponen en la muestra sea $x > 0.5 \cdot 64 = 32$.
Otra manera sería. En una muestra de 64 individuos x son los que se oponen. Para que ganen los que se oponen, x tiene que ser al menos la mitad de los votos mas uno, es decir $x \geq 33$. Siendo

$$n = 64 \qquad \mu = np = 26.88 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{64 \cdot 0.42 \cdot 0.58} = 3.95$$

Calculamos $P(33 \leq x)$ aproximando a la distribución normal,

$$x \sim N(26.88; 3.95)$$

$$\begin{aligned}
P(33 \leq x) =& 1 - P(x \leq 32) \\
=& 1 - P\left(z < \frac{32.5 - 26.88}{3.95}\right) \\
=& 1 - \Phi(1.42) \approx \boxed{0.0778}
\end{aligned}$$

□

Realiza el siguiente test sobre los conceptos de proporción de una muestra y proporción de la población:

Inicio del Test En una localidad de 6000 habitantes, la proporción de menores de 16 años es $p = 1/4$. Sea x el número de menores de 16 años en una muestra de tamaño n.

1. El estimador $\hat{p}$ de p es:

☐ x ☐ $\dfrac{x}{n}$ ☐ np

2. El media de $\hat{p}$ es:

☐ p ☐ x ☐ np

3. El desviación típica de $\hat{p}$ es:

☐ $\sqrt{npq}$ ☐ $\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$ ☐ 0

4. La distribución de x es:

☐ $B(n; \dfrac{3}{4})$ ☐ $B(n; \dfrac{1}{4})$ ☐ otra

5. La media de x es:

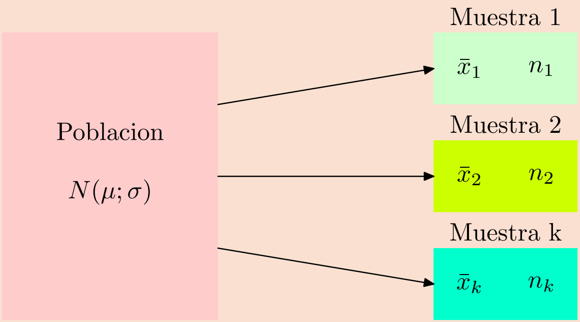
☐ $\dfrac{1}{4}$ ☐ $\dfrac{n}{4}$ ☐ otra

Final del Test Puntos: Correctas

2.2. Distribución muestral de la media

Si cierta característica x en una población es una variable aleatoria normal $N(\mu;\sigma)$, podemos elegir aleatoriamente muestras de tamaño n y obtener en cada muestra la media, por ejemplo

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$



Si suponemos que $x \sim N(\mu;\sigma)$, y el muestreo es aleatorio,la media muestral $\overline{x}$ se distribuye de forma normal con media $\mu_{\overline{x}} = \mu$ y varianza $\sigma^2_{\overline{x}} = \dfrac{\sigma^2}{n}$, luego

$$\boxed{\bar{x} \sim N\left(\mu\ ;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \tag{3}$$

Si por ejemplo sabemos que el peso de los libros de texto en el instituto se distribuye de forma normal y su peso medio es de $\mu = 400$ g y su desviación típica $\sigma = 50$ g, podemos tomar aleatoriamente muestras de tamaño $n = 16$ y obtener el peso medio

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{16}}{16}$$

en cada muestra.

Muestra	peso medio $\bar{x}$
muestra 1	385 g
muestra 2	407 g
...	......
muestra k	392 g

Si suponemos que $x \sim N(400; 50)$ y el muestreo es aleatorio, la media muestral $\overline{x}$ se distribuye de forma normal con media $\mu_{\overline{x}} = 400$ y varianza $\sigma^2_{\overline{x}} = \dfrac{50^2}{16}$, luego

$$\bar{x} \sim N\left(400\ ;\ \frac{50}{\sqrt{16}}\right)$$

Ejemplo 2.3. El peso de los libros de texto en el instituto se distribuye de forma normal con un peso medio de $\mu = 400$ g y una desviación típica $\sigma = 50$ g. Si tomamos una muestra aleatoria de tamaño $n = 16$, hallar la probabilidad de que el peso medio esté entre 375 y 425 g.

Solución:

El peso de los libros es

$$x \sim N(400; 50) \Longrightarrow \bar{x} \sim N(400; \frac{50}{\sqrt{16}}) = N(400; 12.5)$$

$$\begin{aligned} P(375 < \bar{x} < 425) =& P\left(\frac{375-400}{12.5} < z < \frac{425-400}{12.5}\right) \\ =& \Phi\,(2) - \Phi\,(-2) \\ =& 2\,\Phi\,(2) - 1 \approx \boxed{0,9545} \end{aligned}$$

$\square$

Realiza el siguiente test sobre los conceptos de la distribución de la media muestral $\overline{x}$:

Inicio del Test El peso de los libros de texto en el instituto se distribuye de forma normal con un peso medio de $\mu = 400$ g y una desviación típica $\sigma = 50$ g. Si tomamos muestras aleatorias de tamaño $n = 36$,

1. El estimador del parámetro μ es:

☐ $\overline{x}$ ☐ $\dfrac{\overline{x}}{n}$ ☐ $n \cdot \overline{x}$

2. El media de la variable $\overline{x}$ es:

☐ μ ☐ $\overline{x}$ ☐ np

3. El desviación típica de la variable $\overline{x}$ es:

☐ S_x ☐ σ ☐ $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

4. La distribución de $\overline{x}$ es:

☐ $N(\mu; S_x)$ ☐ $N(\mu; \dfrac{\sigma}{\sqrt{36}})$ ☐ $N(\mu; \sigma)$

5. La distribución de $\overline{x}$ depende del valor de n:

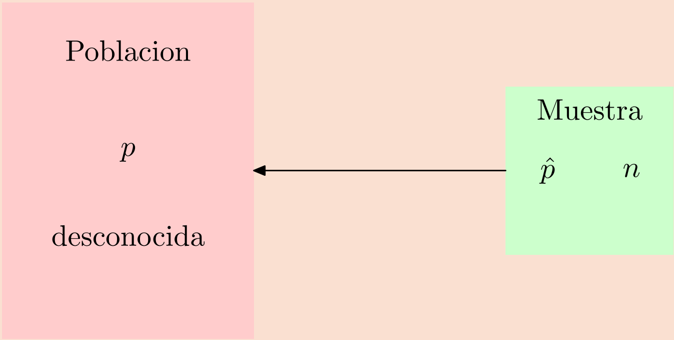
☐ Si ☐ No

Final del Test Puntos: Correctas

3. Intervalos de Confianza

Los intervalos de confianza son intervalos aleatorios que se obtienen para estimar los parámetros desconocidos de la población a partir de los estadísticos de las muestras. Aquí se estudian dos casos.

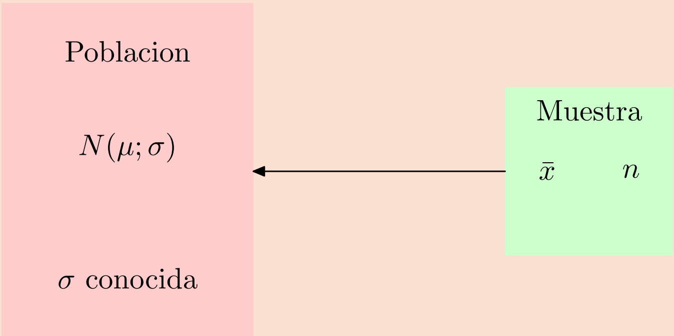
- Intervalo de confianza para estimar la proporción p desconocida de una población, a partir de la proporción $\widehat{p} = \dfrac{x}{n}$ de una muestra de tamaño n.



El gráfico muestra que la información se obtiene a partir de la muestra, y con esa información estimaremos el valor desconocido del parámetro p.

Tabla N(0,1)
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

- Intervalo de confianza para estimar la media μ de una población normal cuando la desviación típica σ es conocida, o cuando la desviación típica σ es desconocida en muestras de tamaño $n \geq 30$. A partir de la media $\overline{x}$ de una muestra de tamaño n.



El gráfico muestra que la información se obtiene a partir de la muestra, y con esa información estimaremos el valor desconocido del parámetro μ.

Es importante resaltar que estos problemas son de inferencia o estimación. Los parámetros son desconocidos y la información se obtiene a partir de las muestras.

3.1. Intervalo de confianza para la proporción

En el apartado 2.1 vimos que la distribución de la proporción muestral corresponde a

$$\hat{p} \sim N\left(p\ ;\ \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \tag{4}$$

Nuestro problema ahora consiste en estimar la proporción real p a partir de la proporción muestral $\hat{p}$.
El estimador $\hat{p}$ se calcula a partir del número x de "éxitos" en una muestra de tamaño n, $\hat{p} = \dfrac{x}{n}$

Tipificando en (4) tenemos

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0;1) \tag{5}$$

Si fijamos una probabilidad $1-\alpha$ se puede construir un intervalo simétrico con los valores de z en la curva normal estándar, de forma que el área entre esos dos valores sea igual a $1-\alpha$

$$P\underbrace{\left(z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}\right)}_{intervalo} = 1-\alpha$$

sustituyendo z por la expresión (5) se obtiene

$$P\left(z_{\alpha/2} < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} < z_{1-\alpha/2} \right) = 1-\alpha \tag{6}$$

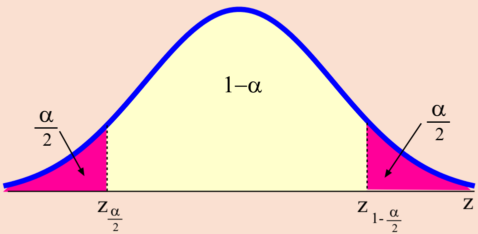
y despejando p, se obtiene el intervalo de confianza para p.

$$\boxed{\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \; ; \; \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)} \tag{7}$$

siendo $z_{1-\alpha/2}$ el cuantil $1-\alpha/2$ de la distribución normal.

La fórmula (7) no debe usarse si $x \leq 5$, o si $n - x \leq 5$ o si $\alpha < 0.05$.

Al valor de $1-\alpha$ se le llama nivel de confianza y al valor de α se le llama nivel de significación



MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar
$I.C.(\mu)$ $I.C.(p)$ $\mathbf{H_0} \equiv \mu$ $H_0 \equiv p$

Ejemplo 3.1. Si el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra de tamaño 36 es igual al 30%, Se desea estimar la proporción p de individuos daltónicos de una población con un nivel de confianza de $1-\alpha = 0.95$.

Solución:

Si $\hat{p} = 0.3 \quad n = 36 \quad 1-\alpha = 0.95$. Buscamos en la tabla normal estándar

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

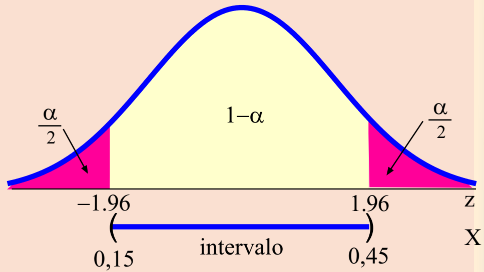
El intervalo viene dado por

$$\hat{p} \pm \; z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$0.3 \pm \; 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{36}}$$

$$0.3 \pm \quad 0.1497$$

luego el intervalo de confianza para p es



$$\boxed{(0.1503 - 0.4497)}$$

$\square$

• Significado del intervalo

Cuando calculamos el intervalo de confianza para una proporción p con un nivel de confianza de $1-\alpha$ con la fórmula

$$\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ;\ \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right),$$

tenemos una probabilidad de $1-\alpha$ de que el intervalo obtenido contenga al valor real y desconocido de p.

Así en el ejemplo anterior, obtuvimos con un nivel de confianza del 0.95 el intervalo

$$\boxed{(0.1503 - 0.4497)}$$

Esto significa que tenemos una probabilidad del 95% de que dicho intervalo contenga la proporción real y desconocida p de individuos daltónicos de la población.

En otras palabras, si construimos de esta forma 100 intervalos, en promedio, 95 de ellos contendrían el valor real y desconocido de la proporción de daltónicos en la población.

• Estudio del error

Cuando calculamos el intervalo de confianza para una proporción p con un nivel de confianza de $1-\alpha$ con la fórmula

$$\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ;\ \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right),$$

el error que cometemos es la semi-amplitud del intervalo, que vale

$$\boxed{\text{error} = e = z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

☞ ¿Cómo podemos hacer más pequeño ese error?

Si se observa la expresión del error, éste será más pequeño cuanto más grande sea el tamaño de la muestra n.

Si deseamos un error e y fijamos un nivel $1-\alpha$, despejando se obtiene:

$$\boxed{n = z^2_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{e^2}} \qquad (8)$$

► ATENCIÓN Si deseamos un error determinado y no conocemos el estimador $\hat{p}$, se sustituye el valor de $\hat{p}$ por 0.5.

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◄◄ ►►
◄ ►
◄ Doc Doc ►
Volver Cerrar

Ejemplo 3.2. Si en el ejemplo anterior aumentamos el tamaño de la muestra a 64 individuos. ¿ Cuánto vale el error o semi-amplitud del intervalo?

Solución:
El error o semi-amplitud del intervalo se aprecia en la expresión del intervalo de confianza

$$\hat{p} \pm \overbrace{z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}^{\text{error}} ; 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{64}} = \boxed{0.1123}$$

□

Ejemplo 3.3. Si en el ejemplo anterior queremos un error de 0.1, manteniendo el mismo nivel de confianza del 0.95. ¿Cuál será el tamaño de la muestra que debemos elegir?.

Solución: Despejamos en la expresión del error el valor del tamaño n de la muestra y sustiuimos por $z_{1-\alpha/2} = 1.96$, $\hat{p} = 0.3$, y $e = 0.1$:

$$z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = e \Longrightarrow n = z^2_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{e^2} \approx \boxed{81}$$

□

Ejemplo 3.4. En un instituto de Enseñanza Secundaria hay matriculados 800 alumnos. Tomamos una muestra aleatoria de 120 alumnos. En ella, 24 alumnos afirmaron que utilizaban la cafetería del instituto.

Determinar, con un nivel de confianza del 99%, el error cometido al estimar a partir de los datos, la proporción de alumnos que utilizan la cafetería.

Solución:

El estimador de la proporción de alumnos que utilizan la cafetería es

$$\hat{p} = \frac{24}{120} = 0.2$$

Con $1-\alpha = 0.99$, $z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.58$, $\widehat{q} = 0.8$, luego el error es:

$$\begin{aligned} e =& z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot \widehat{q}}{n}} \\ =& 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{120}} \\ =& \boxed{0,094} \end{aligned}$$

□

3.2. Intervalo de Confianza de la media

En el apartado 2.2 vimos que la distribución de la media muestral corresponde a

$$\overline{x} \sim N\left(\mu\ ;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{9}$$

Nuestro problema ahora consiste en estimar la media real μ a partir de la media muestral $\overline{x}$.

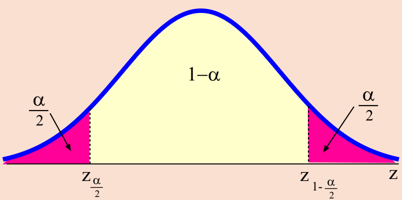
La media $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdot + x_n}{n}$ se calcula a partir de los datos de una muestra aleatoria de tamaño n.

Tipificando en (9) tenemos

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0;1) \tag{10}$$

Si fijamos una probabilidad α se tiene

$$P\underbrace{\left(z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}\right)}_{intervalo} = 1 - \alpha$$



sustituyendo z por (10) y despejando μ, se obtiene:

MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar
$I.C.(\mu)$ $I.C.(p)$ $\mathbf{H_0} \equiv \mu$ $H_0 \equiv p$

- el intervalo de confianza para μ con σ conocida.

$$\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{11}$$

siendo $z_{1-\alpha/2}$ el cuantil $1-\alpha/2$ de la distribución normal estándar.

Al valor de $1-\alpha$ se le llama nivel de confianza y al valor de α se le llama nivel de significación. Cuando el parámetro de la población σ es desconocida la distribución de la $\bar{x}$ para muestras pequeñas no se ajusta a la ecuación (9). Pero para el caso de muestras grandes con $n \geq 30$ la aproximación es buena, sustituyendo σ por la cuasi-desviación típica $\hat{s}$

- el intervalo de confianza para μ con σ desconocida y $n \geq 30$.

$$\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right), \tag{12}$$

equivalente a

$$\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\ ;\ \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right), \tag{13}$$

si utilizamos la desviación típica s de la muestra en lugar de la cuasidesviación típica $\hat{s}$.

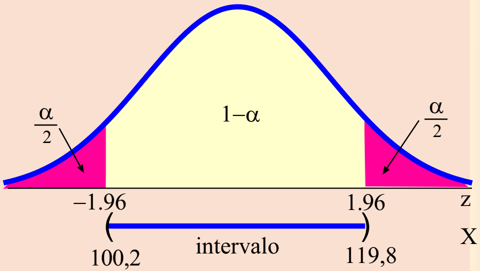
Ejemplo 3.5. Se ha tomado una muestra aleatoria de 16 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 110 mg/cc. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 mg/cc. Obtener un intervalo de confianza, al 95%, para el nivel medio de glucosa en sangre en la población.

Solución:

Si $\overline{x} = 110, \quad n = 16, \quad 1 - \alpha = 0.95$, $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$.
El intervalo viene dado por

$$\begin{aligned} \overline{x} \pm & \; z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ 110 \pm & \; 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{16}} \\ 110 \pm & \; 9.8 \end{aligned}$$

luego el intervalo de confianza para μ es



$$\boxed{(100.2 - 119.8) \;\; mg/cc}$$

□

- **Significado del intervalo**

Cuando calculamos el intervalo de confianza para la media μ con un nivel de confianza de $1-\alpha$ con la fórmula

$$\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

tenemos una probabilidad de $1-\alpha$ de que el intervalo obtenido contenga al valor real y desconocido de μ.

Así en el ejemplo anterior, obtuvimos con un nivel de confianza del 0.95 el intervalo

$$\boxed{(100.2 - 119.8)}$$

Esto significa que tenemos una probabilidad del 95% de que dicho intervalo contenga la media real y desconocida μ de glucosa en sangre en la población.

Dicho de otra forma, si construimos de esta forma 100 intervalos, en promedio, 95 de ellos contendrían el valor medio μ real y desconocido de glucosa en sangre en la población.

• Estudio del error

Cuando calculamos el intervalo de confianza para la media μ con un nivel de confianza de $1-\alpha$ con la fórmula anterior,

$$\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

el error que cometemos es la semi-amplitud del intervalo, que vale

$$\boxed{\text{error} = e = z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \tag{14}$$

☞ ¿Cómo podemos hacer más pequeño ese error?

Si se observa la expresión del error, éste será más pequeño cuanto más grande sea el tamaño de la muestra n.

Si deseamos un error e y fijamos un nivel $1-\alpha$, despejando se obtiene:

$$\boxed{n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{e}\right)^2} \tag{15}$$

Ejemplo 3.6. Si en el ejemplo anterior el tamaño de la muestra fuese 64. ¿ Cuánto valdría el error o semi-amplitud del intervalo?

Solución:
El error o semi-amplitud del intervalo se aprecia en la expresión del intervalo de confianza

$$\overline{x} \pm \overbrace{z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}^{\text{error}} = 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{64}} = \boxed{4.9}$$

□

Ejemplo 3.7. Si en el ejemplo anterior quisiéramos un error de 1 mg/cc. ¿Cuál sería el tamaño de la muestra adecuado?.

Solución:
Despejamos en la expresión del error el valor del tamaño n de la muestra, sustituyendo $z = 1.96$, $\sigma = 20$ y $e = 1$:

$$z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = e \Longrightarrow n = \left(z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{e}\right)^2 \approx \boxed{1537} \text{ individuos}$$

□

4. Contrastes de hipótesis

Empezaremos con un ejemplo del tipo de problema que queremos resolver. Lee detenidamente.

- Supongamos que se fabrican bombillas que tienen una duración normal x con una desviación típica de $\sigma = 0.5$. El fabricante afirma[1] que la duración media de las bombillas es $\mu = 5$ meses
- Para contrastar esta afirmación estudia una muestra de $n = 25$ bombillas y halla la duración media $\bar{x}$ de las 25 bombillas. Si es cierto lo que afirma, que llamaremos Hipótesis nula (H_0),

  $$H_0 \equiv \mu = 5$$

  el estadístico $\bar{x}$ se distribuye como

  $$\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- Luego, si fijamos un nivel de confianza $1-\alpha = 0.95$, el valor de $\bar{x}$ estará en el intervalo

  $$\mu \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 \pm 1.96\frac{0.5}{\sqrt{25}} = (4.804; 5.196)$$

  con una probabilidad del 0.95.
  A este intervalo $(4.804; 5.196)$ le llamamos zona de aceptación

[1] nunca lo sabrá, pues para ello tendría que probar todas las bombillas fabricadas y destruiría la producción.

- Si la duración media $\bar{x}$ en la muestra de las 25 bombillas está en la zona de aceptación, aceptamos la hipótesis nula. En caso contrario la rechazamos y por tanto aceptamos la Hipótesis alternativa (H_1),

En general, la hipótesis nula H_0 afirma algo sobre el valor de un parámetro de una población cuya verdad se quiere probar. Se llama test a un procedimiento que permita pronunciarse a favor o en contra de dicha hipótesis, en el transcurso de una experiencia aleatoria. Los pasos a seguir son los siguientes:

- **Esquema general**

a) Se plantea la hipótesis:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & \mu = \mu_0 \\ H_1 \equiv & \mu \neq \mu_0 \end{array}\right\}$$

b) Para una muestra de tamaño n, se fija el nivel de confianza $1-\alpha$ del contraste y se calcula la zona de aceptación para el estimador del parámetro

$$\text{zona de aceptación } \mu \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

c) Por último se halla en la muestra el valor del estimador $\overline{x}$ y se toma una decisión

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si } \overline{x} \in & \text{zona de aceptación} & \text{se acepta } H_0 \\ \text{Si } \overline{x} \notin & \text{zona de aceptación} & \text{se acepta } H_1 \end{array}\right\}$$

4.1. Contraste de la media de una población normal

- **Cuando σ es conocida**

  - Hipótesis

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & \mu = \mu_0 \\ H_1 \equiv & \mu \neq \mu_0 \end{array}\right\}$$

  - Estadístico de contraste

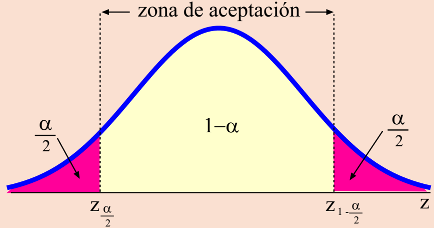
$$\mathbf{z} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

  - Valor crítico para un nivel α

$$z_{1-\alpha/2}$$

  - Criterio de decisión :

Región de aceptación y región crítica
a un nivel de confianza $1-\alpha$



$z_{\alpha/2} < \mathbf{z} < z_{1-\alpha/2}$	Se acepta H_0
caso contrario	Se acepta H_1

Ejemplo 4.1. En una determinada población juvenil, el peso, en kg sigue una distribución normal $N(50, 10)$. Si se extrae una muestra aleatoria de 25 jóvenes y para un nivel de significación del 5%, ¿en qué condiciones se rechazaría la hipótesis de que la media de la población es de 50 kg?

Solución:

- Hipótesis

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & \mu = 50 \\ H_1 \equiv & \mu \neq 50 \end{array}\right\}$$

- Estadístico de contraste

$$\mathbf{z} = \frac{\overline{x} - 50}{10/\sqrt{25}} = \frac{\overline{x} - 50}{2}$$

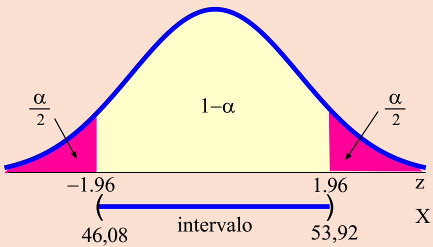
- Valor crítico con $\alpha = 0.05$

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

- Zona de aceptación

$$\mu \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50 \pm 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$(46.08 - 53.92)$$



Se rechazará la hipótesis de que la media de la población es $\mu = 50$ cuando se tenga $|\mathbf{z}| > z_{1-\alpha/2}$ o bien cuando la media de la muestra $\bar{x}$ no esté en la zona de aceptación $(46.08 - 53.92)$. □

- **Contrastes Unilaterales**

Hipótesis $\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & \mu \geq \mu_0 \\ H_1 \equiv & \mu < \mu_0 \end{array}\right\}$

Estadístico de contraste

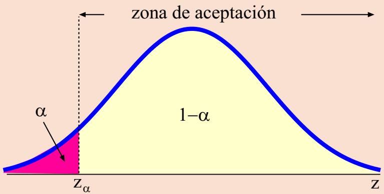
$$\mathbf{z} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Valor crítico para un nivel α

$$z_\alpha$$

Criterio de decisión:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{z} > z_\alpha & \text{se acepta } H_0 \\ \mathbf{z} < z_\alpha & \text{se acepta } H_1 \end{array}\right\}$$



Hipótesis $\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & \mu \leq \mu_0 \\ H_1 \equiv & \mu > \mu_0 \end{array}\right\}$

Estadístico de contraste

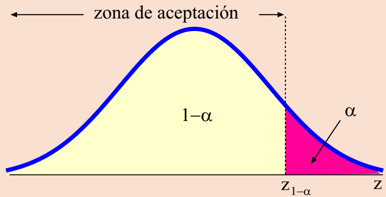
$$\mathbf{z} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Valor crítico para un nivel α

$$z_{1-\alpha}$$

Criterio de decisión:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{z} < z_{1-\alpha} & \text{se acepta } H_0 \\ \mathbf{z} > z_{1-\alpha} & \text{se acepta } H_1 \end{array}\right\}$$



- **Cuando σ es desconocida y la muestra es $n \geq 30$**

En este caso se sustituye σ por la cuasidesviación típica de la muestra.

- Hipótesis

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & \mu = \mu_0 \\ H_1 \equiv & \mu \neq \mu_0 \end{array}\right\}$$

- Estadístico de contraste

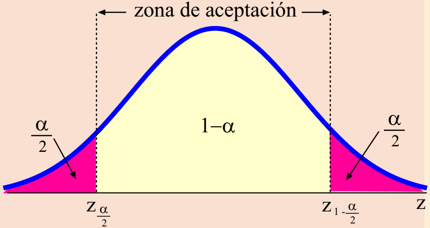
$$\mathbf{z} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}}$$

- Valor crítico para un nivel α

$$z_{1-\alpha/2}$$

- Criterio de decisión :

Región de aceptación y región crítica a un nivel de confianza $1 - \alpha$



$z_{\alpha/2} < \mathbf{z} < z_{1-\alpha/2}$	Se acepta H_0
caso contrario	Se acepta H_1

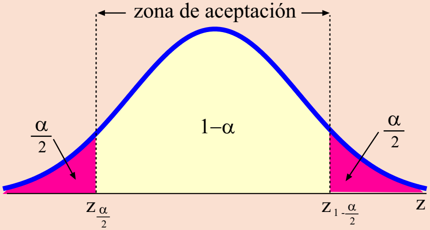
Recuerda que la cuasidesviación es $\hat{s} = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}\, s$

4.2. Contraste de la proporción de una población binomial

- Hipótesis

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & p = p_0 \\ H_1 \equiv & p \neq p_0 \end{array}\right\}$$

Región de aceptación y región crítica
a un nivel de confianza $1-\alpha$



- Estadístico de contraste

$$\mathbf{z} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p\,q}{n}}}$$

- Valor crítico para un nivel α

$$z_{1-\alpha/2}$$

- Criterio de decisión :

$z_{\alpha/2} < \mathbf{z} < z_{1-\alpha/2}$	Se acepta H_0
caso contrario	Se acepta H_1

Test. Considera la hipótesis nula $H_0 \equiv p \leq p_0$ y la alternativa $H_1 \equiv p > p_0$.

1. Se aceptará la hipótesis nula cuando:

(a) $\mathbf{z} > z_\alpha$ (b) $\mathbf{z} < z_{1-\alpha}$ (c) Otro caso

Ejemplo 4.2. Al lanzar 5000 veces una moneda al aire salieron 3000 caras. ¿Se puede aceptar, con un nivel de significación del 0.05, que la moneda no está trucada?

Solución: La proporción de la muestra es $\widehat{p} = \dfrac{3000}{5000} = 0.6$

- Hipótesis

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & p = 0.5 \\ H_1 \equiv & p \neq 0.5 \end{array}\right\}$$

- Estadístico de contraste

$$\mathbf{z} = \frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}} = \frac{0.6 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{5000}}} = \mathbf{14.14}$$

- Valor crítico con $\alpha = 0.05$

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

- Decisión para bilateral

$$|z| = \mathbf{14.14} > 1.96$$

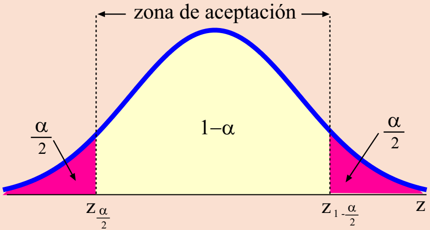
Se rechaza la H_0.

- Zona de aceptación

$$p \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}$$

$$0.5 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{5000}}$$

$$(0.486; 0.514)$$



- $0.6 \notin (0.486; 0.514)$ se rechaza H_0

□

5. Ejercicios

Ejercicio 1. En un instituto de Enseñanza Secundaria hay matriculados 800 alumnos. A una muestra seleccionada aleatoriamente de un 15% de ellos, se les preguntó si utilizaban la cafetería del instituto. Contestaron negativamente un total de 24 alumnos.

a) Estimar el porcentaje de alumnos que utilizan la cafetería del instituto.

b) Determinar, con una confianza del 99%, el error máximo cometido con dicha estimación.

Ejercicio 2. Para estimar la proporción de familias de una determinada ciudad que poseen microondas, se quiere realizar una muestra aleatoria de tamaño n. Calcular el valor mínimo de n para garantizar que, a un nivel de confianza del 95%, el error en la estimación sea menor que 0,05. (*Como se desconoce la proporción, se ha de tomar el caso más desfavorable, que será 0,5*)

Ejercicio 3. Se desea estimar la proporción p de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos de tamaño n.

a) Si el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra es igual al 30%, calcular el valor de n para que, con un nivel de confianza del 0,95,el error cometido en la estimación sea inferior al $3,1\%$.

b) Si el tamaño de la muestra es de 64 individuos y el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra es del 35%, determinar, usando un nivel de significación del 1%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de daltónicos de la población.

Ejercicio 4. En una población normal con $\mu = 16,4$ y $\sigma = 4,8$, se extrae una muestra de tamaño $n = 400$ individuos.Hallar la probabilidad $P(16 < \overline{x} < 17)$.

Ejercicio 5. Se sabe que el contenido de fructosa de cierto alimento sigue una distribución normal, cuya varianza es conocida, teniendo un valor de 0,25. Se desea estimar el valor de la media poblacional mediante el valor de la media de una muestra, admitiéndose un error máximo de 0,2 con una confianza del 95%. ¿Cuál ha de ser el tamaño de la muestra?

Ejercicio 6. La altura de los jóvenes andaluces se distribuye según una ley normal de media desconocida y varianza 25 cm^2. Se ha seleccionado una muestra aleatoria y con una confianza del 95% se ha construido un intervalo para la media poblacional cuya amplitud es de 2.45 cm. Determine el límite superior y el inferior del intervalo de confianza si la muestra tomada dio una altura media de 170 cm.

a) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra seleccionada?.

b) Determinar el intervalo de confianza si la muestra tomada dio una altura media de 170 cm.

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 7. Las especificaciones de un fabricante de botes de pintura dicen que el peso de los botes sigue una distribución normal de media 1 kg de pintura y una desviación estándar de 0,1 kg.

a) ¿Cuál es la media y la desviación estándar de la media muestral de los pesos de una muestra aleatoria simple de 20 botes?.

b) Se ha comprado un lote del que se ha tomado una muestra de 20 botes y en el que la media de los pesos obtenidos es de 0,98 kg. Construye un intervalo de confianza del 95% para la media.

Ejercicio 8. Supongamos que, a partir de una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$, se ha calculado el intervalo de confianza para la media de una población normal, obteniéndose una amplitud de ± 4. Si el tamaño de la muestra hubiera sido $n = 100$, permaneciendo invariable todos los demás valores que intervienen en el cálculo, ¿cuál habría sido la amplitud del intervalo?

Ejercicio 9. Una variable aleatoria X tiene distribución normal siendo su desviación típica igual a 3.

a) Si se consideran muestras de tamaño 16, ¿qué distribución sigue la variable aleatoria media muestral?.

b) Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de 1 unidad de la media de la población, con probabilidad de 0,99. ¿Cuántos elementos, como mínimo, se deberían tomar en la muestra?

Ejercicio 10. A partir de la información suministrada por una muestra aleatoria de 100 familias de cierta ciudad se ha determinado el intervalo de confianza $(42, 58)$ para el gasto medio mensual por familia (en euros) en electricidad al 99% de confianza. Determinar justificando las respuestas:

a) La estimación puntual que daríamos para el gasto mensual por familia en electricidad en esa ciudad.

b) ¿Qué número de familias tendríamos que seleccionar al azar como mínimo para garantizarnos, con una confianza del 99%, una estimación de dicho gasto medio con un error máximo no superior a 3 euros?

Ejercicio 11. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 110 mg/cc. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 mg/cc.

a) Obtener un intervalo de confianza, al 90%, para el nivel medio de glucosa en sangre en la población.

b) ¿Qué error se comete con la estimación anterior?

Ejercicio 12. La media de edad de los alumnos que se presentan a pruebas de acceso a la Universidad es de 18,1 años, y la desviación típica 0,6 años.

a) De los alumnos anteriores se elige, al azar, una muestra de 100. ¿ Cuál es la probabilidad de que la media de la edad de la muestra esté comprendida entre 17.9 y 18.3 años?

b) Qué tamaño debe tener una muestra de dicha población para que su media esté comprendida entre 17.9 y 18.3 años, con una confianza del $99,5\%$?

Ejercicio 13. En un determinado barrio se seleccionó al azar una muestra de 100 personas cuya media de ingresos mensuales resultaba igual a 106.000 pts. con una desviación típica de 20.000 pts. Si se toma un nivel de confianza del 95%,:

a) ¿cuál es el intervalo de confianza para la media de los ingresos mensuales de toda la población?

b) Si se toma un nivel de significación igual a 0,01, ¿cuál es el tamaño muestral necesario para estimar la media de ingresos mensuales con un error menor de 3.000 pts.?

Ejercicio 14. En los folletos de propaganda, una empresa asegura que las bombillas que fabrica tienen una duración media de 1600 horas. A fin de contrastar este dato, se tomó una muestra aleatoria de 100 bombillas, obteniéndose una duración media de 1.570 horas, con una desviación típica de 120 horas. ¿Puede aceptarse la información de los folletos con un nivel de confianza del 95%?

Ejercicio 15. Se sabe que la renta anual de los individuos de una localidad sigue una distribución normal de media desconocida y de desviación típica 0,24 millones. Se ha observado la renta anual de 16 individuos de esa localidad escogidos al azar, y se ha obtenido un valor medio de 1,6 millones de pesetas. Contrastar, a un nivel de significación del 5%, si la media de la distribución es de 1,45 millones de pesetas. ¿Cuáles son las hipótesis nula y alternativa del contraste? Determina la forma de la región crítica. ¿Se acepta la hipótesis nula con el nivel de significación indicado?

Ejercicio 16. En una comunidad autónoma se estudia el número medio de hijos por mujer a partir de los datos disponibles en cada municipio. Se supone que este número sigue una distribución normal con desviación típica igual a 0,08. El valor medio de estos datos para 36 municipios resulta ser igual a 1.17 hijos por mujer. Se desea contrastar, con un nivel de significación de 0.01 , si el número medio de hijos por mujer en la comunidad es de 1.25. cuáles son la hipótesis nula y la alternativa en el contraste. Determínese la región crítica del contraste. ¿Es posible aceptar la hipótesis con el nivel de significación indicado?

Ejercicio 17. Una encuesta realizada a 64 empleados de una fábrica, concluyó que el tiempo medio de duración de un empleo en la misma es de 6,5 años, con una desviación típica de 4. ¿Sirve esta información para aceptar, con un nivel de significación del 5%, que el tiempo medio de empleo en esa fábrica es menor o igual que 6?. Justifica adecuadamente la respuesta.

Ejercicio 18. El 42% de los escolares de un cierto país suelen perder al menos un día de clase a causa de gripes y catarros. Sin embargo, un estudio sobre 1000 escolares revela que en el último curso hubo 450 en tales circunstancias.

Las autoridades sanitarias defienden que el porcentaje del 42% para toda la población de escolares se ha mantenido. Contrasta, con un nivel de significación del 5%, la hipótesis defendida por las autoridades sanitarias, frente a que el porcentaje ha aumentado como parecen indicar los datos, explicando claramente a qué conclusión se llega.

Ejercicio 19. Un investigador, utilizando información de anteriores comicios, sostiene que, en una determinada zona, el nivel de abstención en las próximas elecciones es del 40% como mínimo. Se elige una muestra aleatoria de 200 individuos para los que se concluye que 75 estarían no están dispuestos a votar. Determina, con un nivel de significación del 1%, si se puede admitir como cierta la afirmación del investigador.

Ejercicio 20. El contenido de leche en las botellas llenadas por cierta máquina envasadora, antes de averiarse, se distribuía según una variable aleatoria normal de media 1000 cm^3 y desviación típica 20 cm^3. Tras la reparación de la avería, la distribución de los contenidos de las botellas envasadas por la máquina sigue siendo normal con desviación típica de 20 cm^3, pero al tomar una muestra de 25 botellas llenadas por la máquina reparada se obtiene una media de sus contenidos de 1010 cm^3. Determine si se debe aceptar la hipótesis de que la media de los volúmenes envasados por la máquina tras la reparación sigue siendo de 1000 cm^3, o rechazarla a favor de que la media ha aumentado, con un nivel de significación del 5%.

Ejercicio 21. Según la normativa sobre contaminación atmosférica, los motores de los automóviles no deben emitir más de 5 ppm (partes por millón) de CO_2. Dentro de sus procesos de control de calidad, un fabricante ha medido la emisión de CO_2 en una muestra de 36 motores, obteniendo una media de 5,5 ppm y una desviación típica de 0,6 ppm. Contrasta, con un nivel de significación igual a $0,05$, la hipótesis de que los motores de este fabricante cumplen en media la normativa sobre contaminación.

Ejercicio 22. En los paquetes de arroz de cierta marca pone que el peso que contienen es de 500 g. Una asociación de consumidores toma una muestra de 100 paquetes para los que obtiene una media de 485 g y una desviación típica de 10 g.

a) Calcula el intervalo de confianza al nivel del 95% para el peso medio de los paquetes de la marca en cuestión.

b) ¿Se puede aceptar, con un nivel de significación igual a 0'05, que el fabricante está empaquetando realmente una media de 500 g?

Intervalo de confianza para μ con σ conocida

Datos

$\bar{x} =$ $\sigma =$ Calcular

$n =$ 1 $1-\alpha =$ 0.95

$z_{1-\alpha/2} =$ 1.96

Intervalo de Confianza

–

Si σ no es conocida y $n \geq 30$ sustituir por la cuasi-desviación típica.

Determina del tamaño de la muestras para un error e

Datos

$Error =$ $\sigma =$ Calcular

$1-\alpha =$ 0.95

Tamaño de la muestra

$n =$

Tabla N(0,1) ◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Intervalo de confianza para p

Datos

$\hat{p} =$

$n =$ 1 $\quad 1-\alpha =$ 0.95

Calcular

$z_{1-\alpha/2} =$ 1.96

Intervalo de Confianza

–

Si σ no es conocida y $n \geq 30$ sustituir por la cuasi-desviación típica.

Determina del tamaño de la muestras para un error e

Datos

$Error =$ $\quad \hat{p} =$

$1-\alpha =$ 0.95

Calcular

Tamaño de la muestra

$n =$

Contraste de Hipótesis para μ

Datos $\mathbf{H_0}: \mu_0 =$ $\bar{x} =$ $\sigma =$

Elegir $\mathbf{H_1}: \mu$ <> μ_0 $n =$ 1 $1-\alpha =$ 0.95

Calcular **Zona de Aceptación**

Decisión **la hipótesis nula.**

Contraste de Hipótesis para p

Datos $\mathbf{H_0}: p_0 =$ $\hat{p} =$

Elegir $\mathbf{H_1}: p$ <> p_0 $n =$ 1 $1-\alpha =$ 0.95

Calcular **Zona de Aceptación**

Decisión **la hipótesis nula.**

$I.C.(\mu)$ $I.C.(p)$ $\mathbf{H_0} \equiv \mu$ $H_0 \equiv p$

MATEMATICAS 2º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Tabla Normal N(0; 1)

z	0.00	**0.01**	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2,5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

$$\mathbf{\Phi}(-z) = 1 - \mathbf{\Phi}(z)$$

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.
El tamaño de la muestra es $0.15 \cdot 800 = 120$ y 24 usan la cafetería luego

a) el estimador del porcentaje de alumnos que utilizan la cafetería del instituto es

$$\widehat{p} = \frac{24}{120} = 0.2 \qquad \boxed{20\%}$$

b) Datos: $1-\alpha = 0.99$, $z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.58$, $\widehat{p} = 0.2$ y $\widehat{q} = 0.8$. Luego el error es:

$$\begin{aligned} e =& z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot \widehat{q}}{n}} \\ =& 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{120}} \\ =& \boxed{0,094} \end{aligned}$$

Ejercicio 1

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar
$I.C.(\mu)$ $I.C.(p)$ $\mathbf{H_0} \equiv \mu$ $H_0 \equiv p$

Ejercicio 2.

Datos: $1-\alpha = 0.95$, $z_{1-\alpha/2} = z_{0.955} = 1.96$, $\widehat{p} = 0.5$ y $\widehat{q} = 0.5$. En la expresión del error despejamos n

$$e = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}\cdot\widehat{q}}{n}}$$

$$\begin{aligned} n =& z_{1-\alpha/2}^2 \cdot \frac{\widehat{p}\cdot\widehat{q}}{e^2} \\ =& 1.96^2 \cdot \frac{0.5\cdot 0.5}{0.05^2} = 384,16 \end{aligned}$$

Luego $\boxed{n \geq 385}$

Ejercicio 2

Ejercicio 3.

a) Si $\widehat{p} = 0.3$ y $1-\alpha = 0.95$, $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$. Luego el error es:

$$
\begin{aligned}
e =& z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot \widehat{q}}{n}} = 0.031 \\
n =& z_{1-\alpha/2}^2 \cdot \frac{\widehat{p} \cdot \widehat{q}}{e^2} \\
=& 1.96^2 \cdot \frac{0.3 \cdot 0.7}{0.031^2} = 839,47
\end{aligned}
$$

b) Ahora, $n = 64$, $\widehat{p} = 0.35$ $\alpha = 0.01$ y $z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.58$ luego el intervalo de confianza para p es:

$$
\widehat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot \widehat{q}}{n}} \qquad 0.35 \pm 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{64}}
$$

$$
0.35 \pm 0,154 \qquad \boxed{(0.196 - 0.504)}
$$

Ejercicio 3

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4.

Siendo $n = 400$, si $x \sim N(16.4; 4.8) \Longrightarrow \overline{x} \sim N(16.4; \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = N(16.4; 0.24)$

$$\begin{aligned}
P(16 < \overline{x} < 17) =& P\left(\frac{16 - 16.4}{0.24} < z < \frac{17 - 16.4}{0.24}\right) \\
=& \Phi\left(2.5\right) - \Phi\left(-1.67\right) \\
=& \Phi\left(2.5\right) + \Phi\left(1.67\right) - 1 = \boxed{0,9463}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4

Ejercicio 5.
Conocemos $\sigma^2 = 0.25$, $1-\alpha = 0.95$ y el error $e = 0.2$. Como $\alpha = 0.05$ se tiene $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$ y

$$e = z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.2 \Longrightarrow n = \left(\frac{z\cdot\sigma}{0.2}\right)^2 = \left(\frac{1.96\cdot 0.5}{0.2}\right)^2 = 24.01$$

luego

$$\boxed{n \geq 25}$$

Ejercicio 5

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar
$I.C.(\mu)$ $I.C.(p)$ $\mathbf{H_0} \equiv \mu$ $H_0 \equiv p$

Ejercicio 6.

a) el tamaño de la muestra seleccionada

si $x \sim N(\mu;5) \Longrightarrow \overline{x} \sim N(\mu;\dfrac{5}{\sqrt{n}}$ la amplitud con $\alpha = 0.05$ es

$$2\,z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.45 \Longrightarrow n = \left(2\cdot\frac{z\cdot\sigma}{2.45}\right)^2 = \left(2\cdot\frac{1.96\cdot 5}{2.45}\right)^2 = 64$$

b) intervalo de confianza si la muestra tomada dio una altura media de 170 cm.

$$\begin{aligned}\overline{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 170 \pm 1.96\frac{5}{\sqrt{64}}\\ &= 170 \pm 1,225\\ &= \boxed{(168,775 - 171,225)}\end{aligned}$$

Ejercicio 6

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar
$I.C.(\mu)$ $I.C.(p)$ $\mathbf{H_0} \equiv \mu$ $H_0 \equiv p$

Ejercicio 7.

Datos: el peso de los botes sigue $N(1; 0.1)$, luego para $n = 20$

a) la media muestral de los pesos de la muestra se ajusta a

$$\overline{x} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(1; \frac{0.1}{\sqrt{20}}\right)$$

b) intervalo de confianza si la muestra dio un peso medio de 0,98 kg

$$\begin{aligned} \overline{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} =& 0.98 \pm 1.96\frac{0.1}{\sqrt{20}} \\ =& 0.98 \pm 0.044 \\ =& \boxed{(0,936 - 1,023)} \end{aligned}$$

Ejercicio 7

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8.
Si para $n = 25$ la semi-amplitud es 4

$$z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{25}} = 4 \Longrightarrow z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma = 20$$

para $n = 100$ la semi-amplitud será

$$z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{100}} = \frac{20}{\sqrt{100}} = \boxed{2}$$

Ejercicio 8

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 9.

a) Si $n = 16$ es el tamaño de la muestra

$$x \sim N(\mu; 3) \Longrightarrow \overline{x} \sim N(\mu; \frac{3}{\sqrt{16}}) = N(\mu; 0.75)$$

b) la semi-amplitud con $\alpha = 0.01$ y $z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.58$ es

$$z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1 \Longrightarrow n = \left(\frac{z\cdot\sigma}{1}\right)^2 = \left(\frac{2.58\cdot 3}{1}\right)^2 = 59.9$$

luego

$$\boxed{n \geq 60}$$

Ejercicio 9

MATEMATICAS 2º Bachillerato
r=A+λu
A
δ
B
s=B+μv
SOCIALES
MaTEX
Inferencia
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 10.

a) La estimación puntual que daríamos para el gasto mensual es el punto medio del intervalo $(42, 58)$, es decir $\widehat{\mu} = 50$ euros. De este intervalo obtenido con $n = 100$ se tiene que

$$z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{100}} = 8 \Longrightarrow \sigma \approx 31$$

b) el error para $\alpha = 0.01$ y $z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.58$ es

$$z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 \Longrightarrow n = \left(\frac{z\cdot\sigma}{3}\right)^2 = \left(\frac{2.58\cdot 31}{3}\right)^2 = 710,7556$$

luego

$$\boxed{n \geq 711}$$

Ejercicio 10

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar
$I.C.(\mu)$ $I.C.(p)$ $\mathbf{H_0} \equiv \mu$ $H_0 \equiv p$

Ejercicio 11.

a) intervalo de confianza con $\alpha = 0.1$ y por tanto y $z_{1-\alpha/2} = z_{0.95} = 1.64$

$$\begin{aligned}
\overline{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 110 \pm 1.64\frac{20}{\sqrt{100}} \\
&= 110 \pm 3,28 \\
&= \boxed{(106,72 - 113,28)}
\end{aligned}$$

b) el error es la semi-amplitud del intervalo

$$1.64\frac{20}{\sqrt{100}} = 3,28$$

Ejercicio 11

Ejercicio 12.

a) Siendo $n = 100$, si $x \sim N(18.1; 0.6) \Longrightarrow$

$$\overline{x} \sim N\left(18.1; \frac{0.6}{\sqrt{100}}\right) = N(18.1; 0.06)$$

$$\begin{aligned} P(17.9 < \overline{x} < 18.3) =& P\left(\frac{17.9 - 18.1}{0.06} < z < \frac{18.3 - 18.1}{0.06}\right) \\ =& \Phi\left(3.33\right) - \Phi\left(-3.33\right) \\ =& 2\,\Phi\left(3.33\right) - 1 = \boxed{0,9991} \end{aligned}$$

b) el error es la semi-amplitud del intervalo,es decir 0,2. Como $\alpha = 0.005$ y $z_{1-\alpha/2} = z_{0.9975} = 2.81$ se tiene

$$z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.2 \Longrightarrow n = \left(\frac{z\cdot\sigma}{0.2}\right)^2 = \left(\frac{2.81\cdot 0.6}{0.2}\right)^2 = 71,0649$$

luego

$$\boxed{n \geq 72}$$

Ejercicio 12

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar
$I.C.(\mu)$ $I.C.(p)$ $\mathbf{H_0} \equiv \mu$ $H_0 \equiv p$

Ejercicio 13.
Datos:

$$n = 100 \qquad \overline{x} = 106000 \qquad s_x = 20000$$
$$1-\alpha = 0.95 \text{ con } z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

a) el intervalo de confianza para la media

$$\begin{aligned}\overline{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{s_x}{\sqrt{n-1}} &= 106000 \pm 1.96\frac{20000}{\sqrt{99}}\\ &= 106000 \pm 2010,08\\ &= \boxed{(103990 - 108010,08)}\end{aligned}$$

b) Como $\alpha = 0.01$ y $z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.58$ se tiene para el error

$$z_{1-\alpha/2}\frac{s_x}{\sqrt{n-1}} = 3000 \Longrightarrow n = \left(\frac{z \cdot s_x}{3000}\right)^2 = \left(\frac{2.58 \cdot 20000}{3000}\right)^2 = 295,84$$

luego

$$\boxed{n \geq 296}$$

Ejercicio 13

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar
$I.C.(\mu)$ $I.C.(p)$ $\mathbf{H_0} \equiv \mu$ $H_0 \equiv p$

Ejercicio 14.

Datos $\mu = 1600 \quad \sigma = 120 \quad n = 100 \quad \overline{x} = 1570 \quad \alpha = 0.05$

- Hipótesis

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & \mu = 1600 \\ H_1 \equiv & \mu \neq 1600 \end{array}\right\}$$

- Estadístico de contraste

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1570 - 1600}{120/\sqrt{100}} = \mathbf{-2.5}$$

- Valor crítico con $\alpha = 0.05$

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

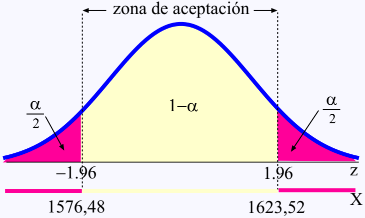
- Decisión.

$$|z| = 2.5 > 1.96 \Longrightarrow \text{ Se rechaza la } H_0$$

- Zona de aceptación

$$\mu \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1600 \pm 1.96 \cdot \frac{120}{\sqrt{100}}$$

$$(1576, 48 - 1623, 52)$$



Ejercicio 14

MATEMATICAS
2º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 15.

Datos $\mu = 1.45 \quad \sigma = 0.24 \quad n = 16 \quad \overline{x} = 1.6 \quad \alpha = 0.05$

- Hipótesis nula y alternativa

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & \mu = 1.45 \\ H_1 \equiv & \mu \neq 1.45 \end{array}\right\}$$

- Estadístico de contraste

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1.6 - 1.45}{0.24/\sqrt{16}} = \mathbf{2.5}$$

- Valor crítico con $\alpha = 0.05$

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

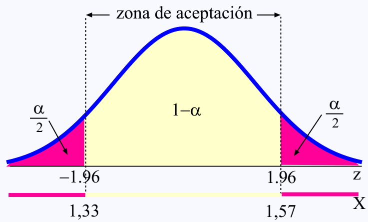
- Decisión.

$$|z| = 2.5 > 1.96 \Longrightarrow \text{ Se rechaza la } H_0$$

- Zona de aceptación

$$\mu \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.45 \pm 1.96 \cdot \frac{0.24}{\sqrt{16}}$$

$$(1.33 - 1.57)$$



Ejercicio 15

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar
$I.C.(\mu)$ $I.C.(p)$ $\mathbf{H_0} \equiv \mu$ $H_0 \equiv p$

Ejercicio 16.
Datos $\mu = 1.25 \quad \sigma = 0.08 \quad n = 36 \quad \overline{x} = 1.17 \quad \alpha = 0.01$

- Hipótesis nula y alternativa

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & \mu = 1.25 \\ H_1 \equiv & \mu \neq 1.25 \end{array}\right\}$$

- Estadístico de contraste

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1.17 - 1.25}{0.08/\sqrt{36}} = \mathbf{33.75}$$

- Valor crítico con $\alpha = 0.01$

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.58$$

- Decisión.

$$|z| = 33.75 > 2.58 \Longrightarrow \text{ Se rechaza la } H_0$$

Ejercicio 16

MATEMATICAS 2º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
Doc Doc
Volver Cerrar
$I.C.(\mu)$ $I.C.(p)$ $\mathbf{H_0} \equiv \mu$ $H_0 \equiv p$

Ejercicio 17.

- Hipótesis

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & \mu \leq 6 \\ H_1 \equiv & \mu > 6 \end{array}\right\}$$

- Estadístico de contraste

$$z = \frac{\overline{x} - 6}{4/\sqrt{64}} = \frac{6.5 - 6}{0.5} = \mathbf{1}$$

- Valor crítico con $\alpha = 0.05$

$$z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.65$$

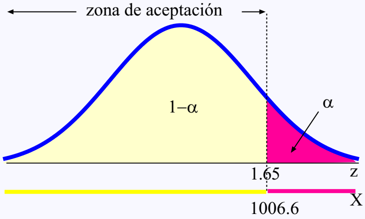
- Decisión para unilateral

$$z = 1 < 1.65 \Longrightarrow \text{ Se acepta la } H_0$$

- Zona de aceptación

$$\mu + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6 + 1.65 \cdot \frac{4}{\sqrt{64}}$$

$$(-\infty; 6,825)$$



- Como $6.5 \in$ zona de acepatción se acepta la H_0

Ejercicio 17

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 18.

- Hipótesis

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & p \leq 0.42 \\ H_1 \equiv & p > 0.42 \end{array}\right\}$$

- Estadístico de contraste

$$z = \frac{\overline{p} - p}{\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}} = \frac{0.45 - 0.42}{\sqrt{\frac{0.42 \cdot 0.58}{1000}}} = \mathbf{1.92}$$

- Valor crítico con $\alpha = 0.05$

$$z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.65$$

- Decisión para unilateral

$$z = \mathbf{1.92} > 1.65$$

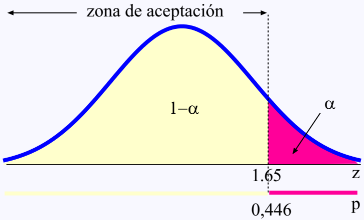
Se rechaza la H_0.

- Zona de aceptación

$$p + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$$

$$0.42 + 1.65 \cdot \sqrt{\frac{0.42 \cdot 0.58}{1000}}$$

$$(-\infty; 0,446)$$



- Como 0.45 no pertenece a la zona de aceptación se rechaza la H_0

Ejercicio 18

MATEMATICAS 2º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar
$I.C.(\mu)$ $I.C.(p)$ $\mathbf{H_0} \equiv \mu$ $H_0 \equiv p$

Ejercicio 19. La proporción de la muestra es $\widehat{p} = \dfrac{75}{200} = 0.375$

- Hipótesis

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & p \geq 0.4 \\ H_1 \equiv & p < 0.4 \end{array}\right\}$$

- Estadístico de contraste

$$z = \frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}} = \frac{0.375 - 0.4}{\sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{200}}} = \mathbf{-0.72}$$

- Valor crítico con $\alpha = 0.01$

$$z_\alpha = z_{0.01} = -2.33$$

- Decisión para unilateral

$$z = \mathbf{-0.72} > -2.33$$

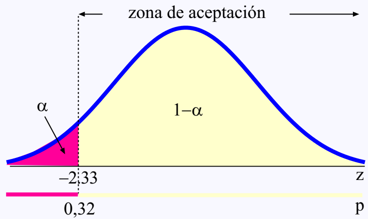
Se acepta la H_0.

- Zona de aceptación

$$p - z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}$$

$$0.4 - 2.33\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{200}}$$

$$(0.32;\infty)$$



- $0.375 \in (0.32;\infty)$ se acepta H_0

Ejercicio 19

MATEMATICAS 2º Bachillerato
r=A+λu
A
B
s=B+μv
SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

$I.C.(\mu)$ $I.C.(p)$ $\mathbf{H_0} \equiv \mu$ $H_0 \equiv p$

Ejercicio 20.

- Hipótesis

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & \mu \leq 1000 \\ H_1 \equiv & \mu > 1000 \end{array}\right\}$$

- Estadístico de contraste

$$z = \frac{\overline{x} - 1000}{20/\sqrt{25}} = \frac{1010 - 1000}{4} = \mathbf{2.5}$$

- Valor crítico con $\alpha = 0.05$

$$z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.65$$

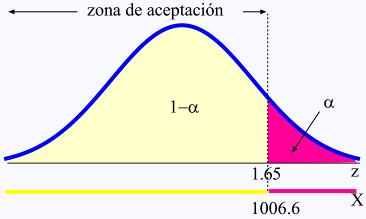
- Decisión para unilateral

$$z = 2.5 > 1.65 \Longrightarrow \text{ Se rechaza la } H_0$$

- Zona de aceptación

$$\mu + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1000 + 1.65 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}}$$

$$(-\infty; 1006.6)$$



- Como $1010 > 1006.6$ se rechaza la H_0

Ejercicio 20

MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 21.

- Hipótesis

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \equiv & \mu \leq 5 \\ H_1 \equiv & \mu > 5 \end{array}\right\}$$

- Estadístico de contraste

$$z = \frac{\overline{x} - 5}{\hat{s}/\sqrt{n}} = \frac{5.5 - 5}{0.1} = \mathbf{5}$$

- Valor crítico con $\alpha = 0.05$

$$z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.65$$

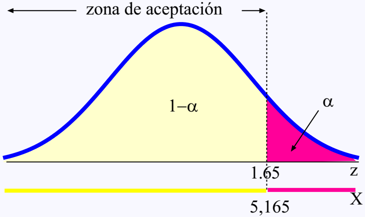
- Decisión para unilateral

$$z = 5 > 1.65 \Longrightarrow \text{ Se rechaza la } H_0$$

- Zona de aceptación

$$\mu + z_{1-\alpha}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = 5 + 1.65 \cdot \frac{0.6}{\sqrt{36}}$$

$$(-\infty; 5.165)$$



- Como $5.5 \notin$ zona de aceptación se rechaza la H_0

Ejercicio 21

Ejercicio 22.
Datos: $n = 100$, $\overline{x} = 485$ y $s_x = 10$.

a) el intervalo de confianza para el peso medio.
Con $1 - \alpha = 0.95$ como

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

el intervalo viene dado por

$$\begin{aligned}
\overline{x}\pm &\quad z_{1-\alpha/2}\frac{s_x}{\sqrt{n-1}}\\
485\pm &\quad 1.96\frac{10}{\sqrt{99}}\\
485\pm &\quad 1.97
\end{aligned}$$

$$\boxed{(483.03 - 486.97)}$$

b) ¿Se puede aceptar, con un nivel de significación igual a 0'05, que el fabricante está empaquetando realmente una media de 500 g?
Como el valor de $500 \notin (483.03 - 486.97)$, no podemos aceptar que el fabricante está empaquetando realmente con un peso medio de 500 g.

Ejercicio 22

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
INFERENCIA
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar
$I.C.(\mu)$ $I.C.(p)$ $\mathbf{H_0} \equiv \mu$ $H_0 \equiv p$

Soluciones a los Tests

Solución al Test: Se aceptará la hipótesis nula cuando

$$\mathbf{z} < z_{1-\alpha}$$

Véase la sección sobre contrastes unilaterales. Final del Test

Index