

Proyecto MaTeX

Derivadas

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

© 2004 javier.gonzalez@unican.es
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

DERIVADAS

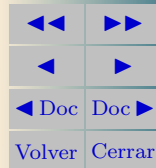


Tabla de Contenido

1. Introducción

1.1. Tasa de variación media

- Interpretación geométrica

1.2. Tasa de variación instantánea

1.3. El problema de la tangente

2. Derivada en un punto

2.1. Derivadas laterales

3. Reglas básicas

- Derivada de una constante
- Derivada de la potencia

4. Reglas de Derivación

- Regla de la suma
- Regla del producto
- Regla del cociente
- Regla de la cadena

5. Derivadas de las funciones trascendentes

5.1. Derivadas Trigonómicas

5.2. Derivadas Exponenciales

5.3. Derivadas Logarítmicas

5.4. Derivadas de Arcos trigonométricos

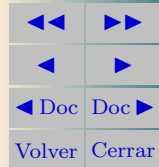
Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests



MaT_EX

DERIVADAS



1. Introducción

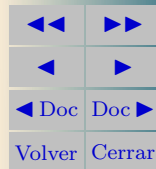
Los científicos de los últimos años del siglo XVII dedicaron gran parte de su tiempo y energía a resolver el problema de la tangente que tiene relación en cuestiones como las siguientes:

- En óptica, el ángulo con el que un rayo de luz incide en una superficie de una lente está definida en términos de la tangente a la superficie.
- En física, la dirección de un cuerpo en movimiento en un punto de su recorrido es la de la tangente en ese punto.
- En geometría, al ángulo entre dos curvas que intersecan es el ángulo entre las tangentes en el punto de intersección.
- ¿Cómo encontraremos la ecuación de la tangente? Usaremos el método ya desarrollado por Fermat en 1629.



MaTeX

DERIVADAS





1.1. Tasa de variación media

La siguiente tabla da el precio en euros¹ de un producto en 8 años sucesivos

precio	10	18	24	28	30	30	28	24
año	0	1	2	3	4	5	6	7

Si llamamos $P(x)$ a la función precio y x designa los años, podemos preguntar cuál es la variación o incremento del precio en el intervalo $[0, 1]$, y ésta sería

$$\Delta P = P(1) - P(0) = 18 - 10 = 8 \text{ euros}$$

la variación o incremento del precio en el intervalo $[1, 3]$, y ésta sería

$$\Delta P = P(3) - P(1) = 28 - 18 = 10 \text{ euros}$$

Ahora bien, **la tasa de variación media** es el incremento por unidad de tiempo.

- La tasa de variación media del precio en el intervalo $[0, 1]$ es

$$T.V.M. = \frac{P(1) - P(0)}{1 - 0} = \frac{18 - 10}{1} = 8 \text{ euros/año}$$

- La tasa de variación media del precio en el intervalo $[1, 3]$ es

$$T.V.M. = \frac{P(3) - P(1)}{3 - 1} = \frac{28 - 18}{2} = 5 \text{ euros/año}$$

¹Hemos cambiado los números para que sean más cómodos de usar

MaTEX

DERIVADAS



- La tasa de variación media del precio en el intervalo $[3, 7]$, es

$$T.V.M. = \frac{P(7) - P(3)}{7 - 3} = \frac{24 - 28}{4} = -1 \text{ euros/año}$$

que indica que el precio ha disminuido a razón de un euro por año.

De esta forma definimos de la tasa de variación media para una función $f(x)$ en un intervalo $[x, x + h]$ como

Tasa de Variación Media

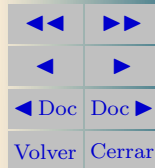
$$T.V.M. = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

En el intervalo $[x, x + h]$ la TVM representa gráficamente la pendiente del segmento que va desde el punto $(x, f(x))$ al punto $(x + h, f(x + h))$. En gráfico siguiente se muestra como varía gráficamente la TVM en distintos intervalos.



MaTeX

DERIVADAS



- Interpretación geométrica

En $[1, 3]$

$$\begin{aligned} T.V.M. &= \frac{P(3) - P(1)}{3 - 1} \\ &= \frac{28 - 18}{2} = 5 \text{ euros/año} \end{aligned}$$

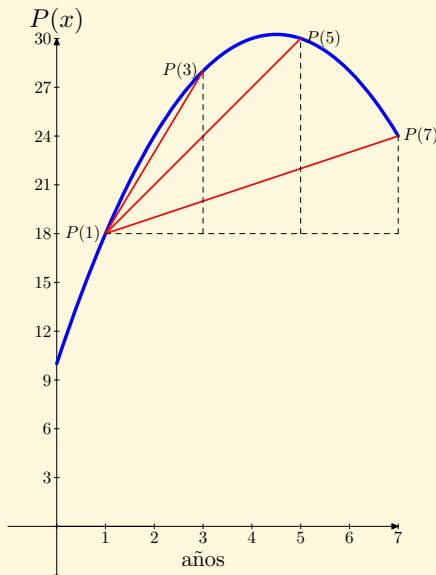
En $[1, 5]$

$$\begin{aligned} T.V.M. &= \frac{P(5) - P(1)}{5 - 1} \\ &= \frac{30 - 18}{4} = 3 \text{ euros/año} \end{aligned}$$

En $[1, 7]$

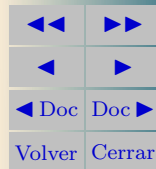
$$\begin{aligned} T.V.M. &= \frac{P(7) - P(1)}{7 - 1} \\ &= \frac{24 - 18}{6} = 1 \text{ euros/año} \end{aligned}$$

La $T.V.M.$ representa la pendiente del segmento que une los puntos de la curva.



MaTeX

DERIVADAS





1.2. Tasa de variación instantánea

Como el intervalo $[x, x + h]$ varía con h , si hacemos h cada vez más pequeño, es decir hacemos tender h a 0, obtenemos la TVI, **Tasa de variación instantánea**.

Tasa de Variación instantánea

$$T.V.I.(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

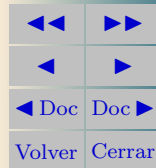
La expresión anterior es muy importante en matemáticas y se relaciona con el cálculo de la recta tangente a una función, como mostraremos a continuación.

En el ejemplo anterior de los precios la TVI significa la razón de cambio del precio en un instante de tiempo.

Gráficamente indica la pendiente de la tangente a la función en el punto $(x, f(x))$.

MaTEX

DERIVADAS



Ejemplo 1.1. Si $P(x)$ es precio de un producto y x designa los años, siendo

$$P(x) = -x^2 + 9x + 10$$

hallar la *TVI* en el año $x = 1$ y en el año $x = 7$

Solución: El precio en el año $x = 1$ es $P(1) = 18$ y la *TVI* es

$$\begin{aligned} TVI(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(1+h) - P(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1+h)^2 + 9(1+h) + 10 - 18}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 7h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 7) = 7 \end{aligned}$$

es decir, en $x = 1$ el precio está aumentando a razón de $TVI(1) = 7$ euros/año

$$\begin{aligned} TVI(7) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(7+h) - P(7)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(7+h)^2 + 9(7+h) + 10 - 24}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h - 5) = -5 \end{aligned}$$

es decir, en $x = 7$ el precio está disminuyendo a razón de $TVI(7) = -5$ euros/año \square



MaTEX

DERIVADAS





1.3. El problema de la tangente

Dada una función $y = f(x)$ y un punto $A(a, f(a))$ del grafo de la función se trata de determinar la pendiente de la **recta tangente** al grafo de la función en el punto A . Consideremos la recta secante desde A a B . Siendo los puntos $A(a, f(a))$ y $B(a + h, f(a + h))$,

la secante AB tiene pendiente

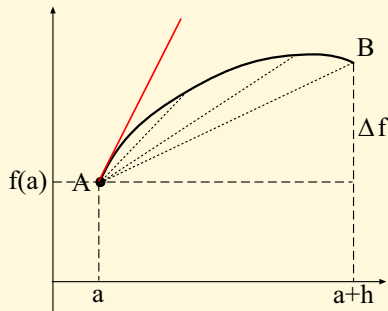
$$m = \frac{\Delta f}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

A medida que $h \rightarrow 0$, $B \rightarrow A$, y definimos la pendiente de la tangente m_{tan} como

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

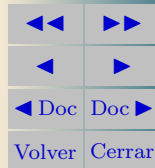
Esta pendiente la escribiremos como $f'(a)$ quedando la ecuación de la tangente de la forma

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad (1)$$



MaTeX

DERIVADAS



Ejemplo 1.2. Hallar en $x = 2$ la tangente a la curva $f(x) = x^2$.

Solución: El punto de la curva en $x = 2 \implies f(2) = 2^2 = 4$, $A(2, 4)$. La pendiente de la tangente es

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4 \end{aligned}$$

Siendo la recta tangente

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

□

Ejemplo 1.3. Hallar en $x = 1$ la tangente a la curva $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solución: El punto de la curva en $x = 1 \implies f(1) = \frac{1}{1} = 1$, $A(1, 1)$. La pendiente de la tangente es

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(1+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{1+h} = -1 \end{aligned}$$

Siendo la recta tangente

$$y - 1 = -(x - 1)$$

□



MaTEX

DERIVADAS





2. Derivada en un punto

Sea f una función, definimos la derivada en $x = a$, $f'(a)$ como

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

2.1. Derivadas laterales

Definición 2.1 Sea f una función y $a \in \text{Dom}(f)$

1. Definimos la derivada por la izquierda de f en a cuando

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe} \quad (3)$$

2. Definimos la derivada por la derecha de f en a cuando

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe} \quad (4)$$

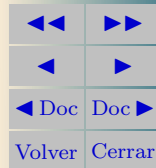
Teorema 2.1. Sea f una función definida en un intervalo abierto conteniendo a x , entonces $f'(x)$ existe si y solo si existen las derivadas laterales $f'(x^-)$ y $f'(x^+)$ y son iguales. En este caso

$$f'(x) = f'(x^-) = f'(x^+)$$

Solución: Se deduce de la propia definición de límite, ya que para que un límite exista deben existir los límites laterales y ser iguales. ◀

MaTeX

DERIVADAS





Ejemplo 2.1. ¿Es derivable $f(x) = |x|$ en $x = 0$?.

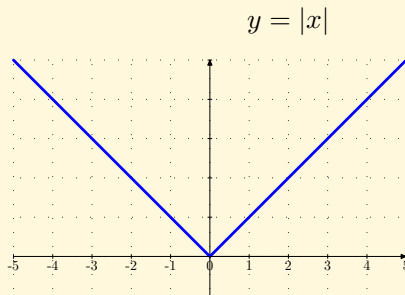
Solución: Siendo $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \leq 0 \\ x & > 0 \end{cases}$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$



Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ la función no es derivable en $x = 0$

□

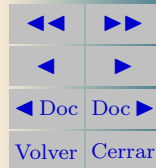
Test. La función $f(x) = x - |1 - x|$ es derivable en $x = 1$.

(a) Si

(b) No

MaTeX

DERIVADAS





3. Reglas básicas

• Derivada de una constante

Teorema 3.1. Sea f una función constante $f(x) = c \quad \forall x \in R$, siendo c un número real, entonces

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in R$$

• Derivada de la potencia

Teorema 3.2. (Regla de la potencia) Consideremos la función $f(x) = x^n$, para algún número natural $n \in N$. Entonces

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad x \in R \quad (5)$$

Nota al Teorema. La regla anterior se extiende y funciona cuando el exponente es cualquier **número real**.

Ejemplo 3.1. Hallar las derivadas de

$$f(x) = x^6 \quad g(x) = x^{-5} \quad h(x) = x^{5/3}$$

Solución:

$$f'(x) = 6x^5 \quad g'(x) = -5x^{-6} \quad h'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3}$$

□

Ejercicio 1. Calcular las derivadas.

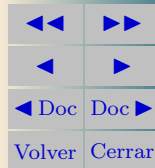
a) $f(x) = 2x^{13}$

b) $f(x) = \sqrt{x^3}$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x^7}$

MaTEX

DERIVADAS





4. Reglas de Derivación

● Regla de la suma

Teorema 4.1. (Derivada de la suma) Sean las funciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) \quad (6)$$

$$[u + v]' = u' + v' \quad (7)$$

Ejemplo 4.1. Hallar las derivadas de

$$f(x) = x^3 + x^4 \quad g(x) = x^2 - x^{-3}$$

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x^3 \quad g'(x) = 2x + 3x^{-4}$$

□

Ejercicio 2. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = 3x^2 - 5x^{-3}$

b) $f(x) = x^2 - 3, x^5$

c) $f(x) = x^{10} + x^{-10}$

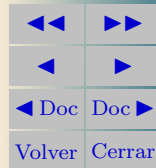
d) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^5}$

e) $f(x) = x^8 + x^{8,003}$

f) $f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[5]{x}$

MaTEX

DERIVADAS



• Regla del producto

Teorema 4.2. (Derivada del producto) Sean las funciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (8)$$

$$[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (9)$$

Ejemplo 4.2. Hallar la derivada del producto

$$f(x) = (x^3 + x^4)(x^2 - x^{-3})$$

Solución:

$$f'(x) = (3x^2 + 4x^3) \cdot (x^2 - x^{-3}) + (x^3 + x^4) \cdot (2x + 3x^{-4})$$

□

Ejercicio 3. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = (x^2 + 10)(1 - x^2)$

b) $f(x) = (x + x^2 + 1) \cdot (1 + x)$

c) $f(x) = (x^{10} + 1)(1 - x)$

d) $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot (1 - x^2)$

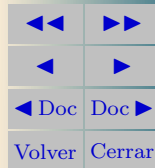
e) $f(x) = (x^2 + x^3) \cdot (3 + x)$

f) $f(x) = (\sqrt{x^3} + x) \cdot (x - \sqrt[5]{x})$



MaTEX

DERIVADAS



- Regla del cociente

Teorema 4.3. (Derivada del cociente) Sean $u = f(x)$ y $v = g(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad (10)$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (11)$$

Ejemplo 4.3. Hallar la derivada del cociente $f(x) = \frac{x^3 + x^4}{x^2 - x^{-3}}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x^3)(x^2 - x^{-3}) - (x^3 + x^4)(2x + 3x^{-4})}{(x^2 - x^{-3})^2}$$

□

Ejercicio 4. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

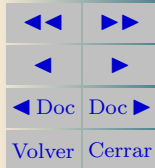
c) $f(x) = \frac{x^{10} + 1}{1 - x}$

d) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 3}$



MaTeX

DERIVADAS



- **Regla de la cadena**

Teorema 4.4. (Regla de la cadena) Sea las funciones $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Supongamos que g es derivable en x y f es derivable en u , entonces la función compuesta $f \circ g$ es derivable en x y su derivada es

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x) \quad (12)$$

Ejemplo 4.4. Hallar las derivadas de

$$f(x) = (2x + x^2 + 5)^3 \quad g(x) = (2 - x^{12})^6$$

Solución:

$$f'(x) = 3(2x + x^2 + 5)^2(2 + 2x)$$

$$g'(x) = 6(2 - x^{12})^5(-12x^{11})$$

□

Ejercicio 5. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = (1 + 2x)^3$

b) $f(x) = (x + x^2)^3$

c) $f(x) = (x^{10} + 1)^2$

d) $f(x) = (2x^3 + x)^3$

e) $f(x) = x^2(2x^3 + x)^3$

f) $f(x) = (1 - x^2)^3(5 + x)^5$



MaTEX

DERIVADAS





5. Derivadas de las funciones trascendentes

5.1. Derivadas Trigonométricas

Teorema 5.1. Las derivadas trigonométricas elementales son:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (13)$$

Ejemplo 5.1. Hallar las derivadas de

$$f(x) = \operatorname{sen} 6x \quad g(x) = \cos(1 + x^2) \quad h(x) = \tan x^3$$

Solución: Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = 6 \cos 6x \quad g'(x) = -2x \operatorname{sen}(1 + x^2) \quad h'(x) = \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}$$

□

Ejercicio 6. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(3x + 1)$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x^3 + 1)$

c) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2 + 1)$

d) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{1-x}\right)$

e) $f(x) = \tan(1 + 2x^2 + x^3)$

f) $f(x) = \sec(1 - x^2)$

MaTeX

DERIVADAS





5.2. Derivadas Exponenciales

Teorema 5.2. Las derivadas de la función exponencial son:

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 1) \quad (14)$$

Ejemplo 5.2. Hallar las derivadas de

$$f(x) = e^{6x} \quad g(x) = e^{1+x^2} \quad h(x) = 6^{\sin x}$$

Solución: Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = 6e^{6x} \quad g'(x) = 2xe^{1+x^2} \quad h'(x) = 6^{\sin x} \ln 6 \cos x$$

□

Ejercicio 7. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = e^{-5x+4x^2}$

b) $f(x) = e^{x \sin x}$

c) $f(x) = e^{1-\sin^2 x}$

d) $f(x) = 2^{\tan 3x}$

e) $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x}$

f) $f(x) = a^{\sin x + \cos x}$

MaTeX

DERIVADAS



5.3. Derivadas Logarítmicas

Teorema 5.3. Las derivadas de la función logarítmica son:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 1) \quad (15)$$



MaTeX

Ejemplo 5.3. Hallar las derivadas de

$$f(x) = \ln(5x - x^2) \quad g(x) = \ln(5 - \sin x) \quad h(x) = \log_3(x^2 + e^x)$$

Solución: Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = \frac{5 - 2x}{5x - x^2} \quad g'(x) = \frac{-\cos x}{5 - \sin x} \quad h'(x) = \frac{1}{\ln 3} \frac{2x + e^x}{x^2 + e^x}$$

□

Ejercicio 8. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x} + 1)$

b) $f(x) = \ln(x^2 + \sin x)$

c) $f(x) = \ln(x^2 \sin x)$

d) $f(x) = \ln^2(1 + e^x)$

e) $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$

f) $f(x) = \log_5\left(\frac{1}{1 + \sin x}\right)$

DERIVADAS





5.4. Derivadas de Arcos trigonométricos

TEOREMA 8. Las derivadas de los arcos trigonométricos son:

$$a) (\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$b) (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$c) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Ejemplo 5.4. Hallar las derivadas de

$$f(x) = \arcsen 6x \quad g(x) = \arctan x^3$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{6}{\sqrt{1-(6x)^2}} \quad g'(x) = \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}$$

□

Ejercicio 9. Calcular las derivadas.

$$a) f(x) = \arcsen(\ln x + x)$$

$$b) f(x) = \arccos(1 - x)$$

$$c) f(x) = \arctan(\sen x)$$

$$d) f(x) = \arctan(\ln x)$$

Ejercicio 10. Calcular las derivadas.

MaTEX

DERIVADAS



a) $f(x) = \ln^2(1 + \cos x)^3$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x(1 + \cos x)^3$

c) $f(x) = e^{1 - \operatorname{sen} x}$

d) $f(x) = 8^{x - \ln x}$

Ejercicio 11. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})^2$

b) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}$

Ejercicio 12. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = x^2 \cdot \arctan x^{-1/2}$

b) $f(x) = x^x$

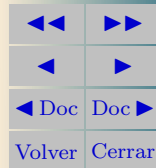
Ejercicio 13. Calcular las derivadas.

a) $f(x) = (\tan x)^{\operatorname{sen} x}$

b) $f(x) = e^x \cdot \sqrt[x]{x}$

MaTEX

DERIVADAS



Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

a) Si $f(x) = 2x^{13}$,

$$f'(x) = 26x^{12}$$

b) $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$. Luego

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

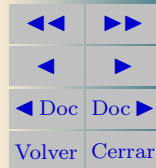
c) $f(x) = \sqrt[5]{x^7} = x^{7/5}$. Luego

$$f'(x) = \frac{7}{5}x^{2/5}$$

Ejercicio 1

MaTEX

DERIVADAS





Ejercicio 2.

a) Si $f(x) = 3x^2 - 5x^{-3}$,

$$f'(x) = 6x + 15x^{-4}$$

b) Siendo $f(x) = x^2 - 3x^5$,

$$f'(x) = 2x - 15x^4$$

c) Si $f(x) = x^{10} + x^{-10}$,

$$f'(x) = 10x^9 - 10x^{-11}$$

d) Siendo $f(x) = x - \sqrt[3]{x^5}$,

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{3}x^{2/3}$$

e) Siendo $f(x) = x^8 + x^{8,003}$,

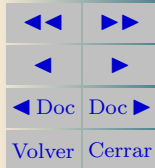
$$f'(x) = 8x^7 + 8,003x^{7,003}$$

f) Siendo $f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[5]{x}$,

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{1}{5}x^{-4/5}$$

MaTEX

DERIVADAS



Ejercicio 2

**Ejercicio 3.**

a) Si $f(x) = (x^2 + 10)(1 - x^2)$,

$$f'(x) = (2x) \cdot (1 - x^2) + (x^2 + 10) \cdot (-2x)$$

b) Siendo $f(x) = (x + x^2 + 1) \cdot (1 + x)$,

$$f'(x) = (1 + 2x) \cdot (-2x) + (x + x^2 + 1) \cdot (-2)$$

c) Si $f(x) = (x^{10} + 1)(1 - x)$,

$$f'(x) = (10x^9) \cdot (1 - x) + (x^{10} + 1) \cdot (-1)$$

d) Siendo $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot (1 - x^2)$,

$$f'(x) = (2x - 2) \cdot (1 - x^2) + (x^2 - 2x) \cdot (-2x)$$

e) Siendo $f(x) = (x^2 + x^3) \cdot (3 + x)$,

$$f'(x) = (2x + 3x^2) \cdot (3 + x) + (x^2 + x^3) \cdot (1)$$

f) Siendo $f(x) = (\sqrt{x^3} + x) \cdot (x - \sqrt[5]{x})$.

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2}x^{1/2} + 1\right) \cdot (x - \sqrt[5]{x}) + (\sqrt{x^3} + x) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}x^{-4/5}\right)$$

Ejercicio 3

MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 4.**

a) Si $f(x) = \frac{1}{x}$,

$$f'(x) = \frac{(0)(x) - (1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

b) Si $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$,

$$f'(x) = \frac{(2x)(x) - (x^2 + 1)(1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

c) Si $f(x) = \frac{x^{10} + 1}{1 - x}$,

$$f'(x) = \frac{(10x^9)(1 - x) - (x^{10} + 1)(-1)}{(1 - x)^2}$$

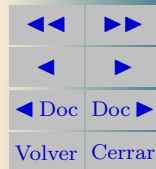
d) Siendo $f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 3}$,

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)(x + 3) - (x^2 + x)(1)}{(x + 3)^2}$$

MaTEX

DERIVADAS

Ejercicio 4



**Ejercicio 5.**

a) Si $f(x) = (1 + 2x)^3$,

$$f'(x) = 3(1 + 2x)^2 (2)$$

b) Siendo $f(x) = (x + x^2)^3$,

$$f'(x) = 3(x + x^2)^2 (1 + 2x)$$

c) Si $f(x) = (x^{10} + 1)^2$,

$$f'(x) = 2(x^{10} + 1)(10x^9)$$

d) Siendo $f(x) = (2x^3 + x)^3$,

$$f'(x) = 3(2x^3 + x)^2 (6x^2 + 1)$$

e) Si $f(x) = f(x) = x^2(2x^3 + x)^3$,

$$f'(x) = 2x(2x^3 + x)^3 + x^2 \cdot 3(2x^3 + x)^2 (6x^2 + 1)$$

f) Siendo $f(x) = (1 - x^2)^3(5 + x)^5$,

$$f'(x) = 3(1 - x^2)^2 (-2x)(5 + x)^5 + (1 - x^2)^3 \cdot 5(5 + x)^4$$

MaTEX

DERIVADAS

Ejercicio 5



**Ejercicio 6.**

a) Si $f(x) = \text{sen}(3x + 1)$.

$$f'(x) = 3 \cos(3x + 1)$$

b) Si $f(x) = \text{sen}(x^3 + 1)$.

$$f'(x) = 3x^2 \cos(x^3 + 1)$$

c) Si $f(x) = \text{sen}^3(x^2 + 1)$. Luego

$$f'(x) = 3 \text{sen}^2(x^2 + 1) \cos(x^2 + 1) (2x)$$

d) Si $f(x) = \cos\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

$$f'(x) = -\text{sen}\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{1}{(1-x)^2}$$

e) Si $f(x) = \tan(1 + 2x^2 + x^3)$,

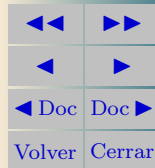
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(1 + 2x^2 + x^3)} (4x + 3x^2)$$

f) Si $f(x) = \sec(1 - x^2) = \frac{1}{\cos(1 - x^2)}$

$$f'(x) = \frac{-\text{sen}(1 - x^2) (-2x)}{\cos^2(1 - x^2)}$$

MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 7.**

a) Si $f(x) = e^{-5x+4x^2}$.

$$f'(x) = e^{-5x+4x^2} (-5 + 8x)$$

b) Si $f(x) = e^{x \operatorname{sen} x}$.

$$f'(x) = e^{x \operatorname{sen} x} (\operatorname{sen} x + x \cos x)$$

c) Si $f(x) = e^{1-\operatorname{sen}^2 x}$. Luego

$$f'(x) = e^{1-\operatorname{sen}^2 x} (-2 \operatorname{sen} x \cos x)$$

d) Si $f(x) = 2^{\tan 3x}$.

$$f'(x) = 2^{\tan 3x} \ln 2 \frac{3}{\cos^2 3x}$$

e) Si $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x}$,

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x} (2x + 3) \ln \frac{3}{5}$$

f) Si $f(x) = a^{\operatorname{sen} x + \cos x}$

$$f'(x) = a^{\operatorname{sen} x + \cos x} \ln a (\cos x - \operatorname{sen} x)$$

MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 8.**

a) Si $f(x) = \ln(x + \sqrt{x} + 1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x} + 1} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

b) Si $f(x) = \ln(x^2 + \operatorname{sen} x)$ $f'(x) = \frac{1}{x^2 + \operatorname{sen} x} (2x + \cos x)$

c) Si $f(x) = \ln(x^2 \operatorname{sen} x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 \operatorname{sen} x} (2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x)$$

d) Si $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$.

$$f'(x) = 2 \ln(1 + e^x) \frac{1}{1 + e^x} e^x$$

e) Si $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$.

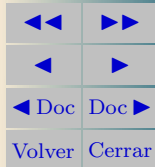
$$f'(x) = 2 \ln(1 + \ln x) \frac{1}{1 + \ln x} \frac{1}{x}$$

f) Si $f(x) = \log_5\left(\frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}\right)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 5} \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \frac{-\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} = -\frac{1}{\ln 5} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 9.**

a) Si $f(x) = \arcsen(\ln x + x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\ln x + x)^2}} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$$

b) Si $f(x) = \arccos(1 - x)$.

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x)^2}} (-1)$$

c) Si $f(x) = \arctan(\sen x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sen x)^2} \cos x$$

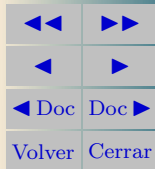
d) Si $f(x) = \arctan(\ln x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \frac{1}{x}$$

MaTEX

DERIVADAS

Ejercicio 9



**Ejercicio 10.**

a) Si $f(x) = \ln^2(1 + \cos x)^3$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \ln(1 + \cos x)^3 \frac{1}{(1 + \cos x)^3} 3(1 + \cos x)^2(-\sin x) \\ &= -6 \ln(1 + \cos x)^3 \frac{\sin x}{(1 + \cos x)} \end{aligned}$$

b) Si $f(x) = \sin x(1 + \cos x)^3$.

$$f'(x) = \cos x(1 + \cos x)^3 + \sin x 3(1 + \cos x)^2(-\sin x)$$

c) Si $f(x) = e^{1-\sin x}$.

$$f'(x) = -e^{1-\sin x} \cos x$$

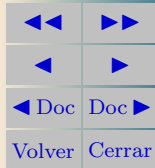
d) Si $f(x) = 8^{x-\ln x}$.

$$f'(x) = 8^{x-\ln x} \cdot \ln 8 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Ejercicio 10

MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 11.**

a) Si $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})^2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1 - \sqrt{x})^2} 2(1 - \sqrt{x}) \frac{-1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})} \end{aligned}$$

b) Si $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}} \cdot \\ &\quad \frac{\sec^2 x(1 - \tan x) + (1 + \tan x)\sec^2 x}{(1 - \tan x)^2} \\ &= \frac{1 - \tan x}{2(1 + \tan x)} \cdot \frac{2\sec^2 x}{(1 - \tan x)^2} \\ &= \frac{\sec^2 x}{(1 + \tan x)(1 - \tan x)} \end{aligned}$$

MaTEX

DERIVADAS

Ejercicio 11



**Ejercicio 12.**

a) Si $f(x) = x^2 \cdot \arctan x^{-1/2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 \cdot \frac{1}{1 + (\frac{1}{\sqrt{x}})^2} \cdot \frac{-1}{2} x^{-3/2} \\ &= 2x \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{1 + (\frac{1}{\sqrt{x}})^2} \end{aligned}$$

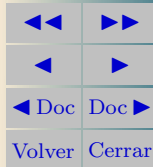
b) Si $f(x) = x^x$. Aplicando logaritmos

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= x \ln x \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\ f'(x) &= (\ln x + 1) \cdot x^x \end{aligned}$$

Ejercicio 12

MaTeX

DERIVADAS



**Ejercicio 13.**

a) Si $f(x) = (\tan x)^{\sen x}$. Aplicando logaritmos

$$\ln f(x) = \sen x \ln \tan x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln \tan x + \sen x \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln \tan x + \frac{1}{\cos x}$$

$$f'(x) = \left(\cos x \ln \tan x + \frac{1}{\cos x} \right) \cdot (\tan x)^{\sen x}$$

b) Si $f(x) = e^x \cdot \sqrt[x]{x}$. Aplicando logaritmos

$$\ln f(x) = x + \frac{1}{x} \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \frac{1}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \left(1 - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) \cdot e^x \cdot \sqrt[x]{x}$$

MaTEX

DERIVADAS

Ejercicio 13



Soluciones a los Tests

Solución al Test: Siendo $f(x) = x - |1 - x| = \begin{cases} 2x - 1 & \leq 1 \\ 1 & > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2(1+h) - 1 - 1}{h} = 2 \\ f'(1^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1}{h} = 0 \end{aligned}$$

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+)$ la función no es derivable en $x = 1$. Final del Test



MaTEX

DERIVADAS



Índice alfabético

derivada, 11

de una constante, 13

de una potencia, 13

en un punto, 11

laterales, 11

derivadas

arcos trigonométricos, 21

exponenciales, 19

logarítmicas, 20

trigonométricas, 18

ecuación de la tangente, 9

El problema de la tangente, 9

regla, 14

de la cadena, 17

de la suma, 14

del cociente, 16

del producto, 15

Tasa de variación instantánea, 7

Tasa de variación media, 4



MaTeX

DERIVADAS

