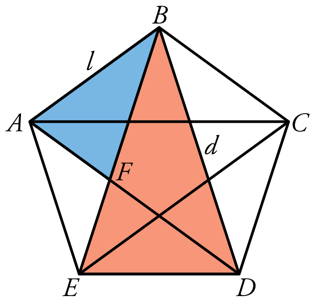
Resuelve

Página 29



1. Demuestra que los triángulos *ABF* y *EBD* son semejantes (es decir, demuestra que sus ángulos son respectivamente iguales).

2. Si llamamos *l* al lado del pentágono y *d* a su diagonal, basándote en la semejanza de los triángulos que acabas de demostrar, halla la relación $\frac{d}{l}$ y comprueba que es el número áureo:

$$\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

El ángulo $\hat{B} = 36°$ en el triángulo ABF, y $\hat{B} = 36°$ en el triángulo EBD. Por otra parte los triángulos DAB y EBD son iguales, luego el ángulo $\hat{A}$ en el triángulo ABF, y $\hat{D}$ en el triángulo EBD son iguales. Por tanto los triángulos son semejantes.

El lado $AF = d - l$.

Por la semejanza de los triángulos ABF y EBD; $\frac{BD}{BF} = \frac{ED}{AF}$; es decir, $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$

Operando, $d(d-l) = l^2$, por tanto $d^2 - dl - l^2 = 0$.

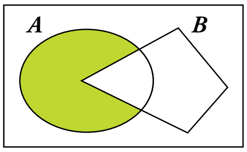
Las soluciones posibles para d son $d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = l\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Como d no puede ser negativa, $d = l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y $\frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

1 Lenguaje matemático: conjuntos y símbolos

Página 31

1 ¿Verdadero o falso?



a) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A - B$.

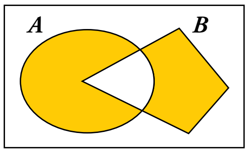
Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B.

b) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A \cap B'$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B, ya que B' es el complementario de B.

c) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$$(A - B) \cup (B - A)$$



Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

d) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, tiene que estar en A o en B, pero no puede estar en los dos a la vez $(A \cap B)$.

e) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

f) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Verdadero, porque todos los números enteros son racionales.

g) $[x \in (\dot{3})$ y $x \in (\dot{2})] \Leftrightarrow x \in (\dot{6})$

$(\dot{n})$ es el conjunto de los múltiplos de n.

Verdadero, porque si un número es a la vez múltiplo de 2 y de 3, entonces es múltiplo de $2 \cdot 3 = 6$.

h) $(\dot{3}) \cap (\dot{2}) = (\dot{6})$

Es la misma afirmación anterior.

i) $x \in A - B \;\Rightarrow\; x \in A \cap B'$

Verdadero, porque los elementos de $A - B$ están en A y no están en B, luego están en A y en B'.

j) $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ es lo mismo que decir $A \subset B$.

Verdadero, porque la implicación indica que todo elemento de A es un elemento de B.

k) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$

Tenemos que comprobar que las dos siguientes afirmaciones son ciertas:

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ que es la afirmación del apartado j)

$A \subset B \Rightarrow x \in \mathrm{A} \Rightarrow x \in \mathrm{B}$, pero si B contiene a A, es porque todos los elementos de A están en B, luego son equivalentes y es verdadera la afirmación.

l) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow B \subset A$

Falso, porque puede existir algún elemento de B que no esté en A.

m) $x \in (0, 1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ **y** $0 < x < 1$

Verdadero, porque los intervalos representan conjuntos de números reales y el intervalo (0, 1) está formado por los números comprendidos entre 0 y 1 que son mayores que 0 y menores que 1, luego son afirmaciones equivalentes.

n) $\sqrt{2} \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **pero** $\sqrt{2}/2 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Verdadero, porque $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional y es mayor que 1, sin embargo $\sqrt{2}/2$ también es irracional, pero está entre 0 y 1.

ñ) $0{,}5 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Falso, porque 0,5 es racional.

o) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **es el conjunto de los números irracionales positivos menores que 1.**

Verdadero, porque son los números reales que no son racionales, es decir, irracionales, y además tienen que ser mayores que cero, por tanto positivos, y menores que 1.

p) $\{x \in \mathbb{Z} \,/\, -2 < x \le 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Verdadero, porque los únicos números enteros mayores que –2 y menores o iguales que 5 son los del conjunto indicado.

q) El conjunto de los números enteros mayores que –5 y menores que 7 es $\mathbb{Z} \cap (-5, 7)$**.**

Verdadero, porque, de los números enteros mayores que –5 y menores que 7, están en el intervalo (–5, 7) y además son enteros.

r) **(*x* es un número real pero no es racional)** $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

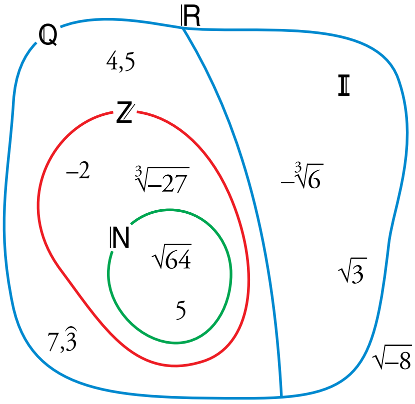
Verdadero, porque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es el conjunto de todos los números reales menos los racionales, que es equivalente a decir los números reales que no son racionales.

2 Números reales. La recta real

Página 32

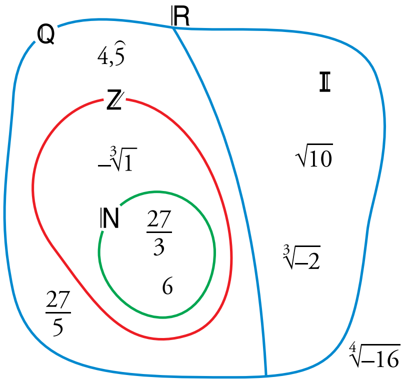
Reflexiona y resuelve

Observa cómo se sitúan estos números en los conjuntos numéricos:



Ahora, en tu cuaderno, sitúa los siguientes números en un diagrama similar:

$-\sqrt[3]{1}$; $4,\hat{5}$; 6; $\sqrt{10}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt[3]{-2}$; 27/5; 27/3



$6, \frac{27}{3} \in \mathbb{N}$ $6, \frac{27}{3}, -\sqrt[3]{1} \in \mathbb{Z}$ $6; \frac{27}{3}; -\sqrt[3]{1}; 4,\hat{5}; \frac{27}{5} \in \mathbb{Q}$

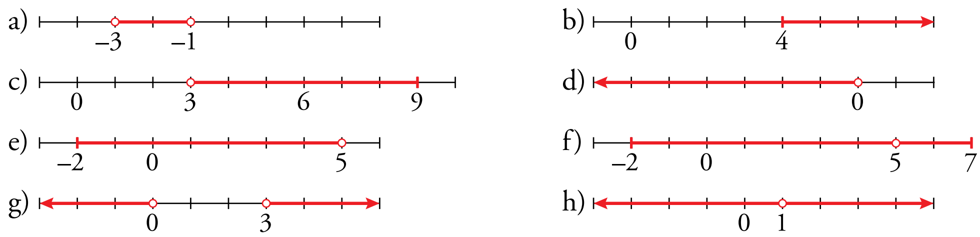
$6; \frac{27}{3}; -\sqrt[3]{1}; 4,\hat{5}; \frac{27}{5}; \sqrt{10}; \sqrt[3]{-2} \in \mathbb{R}$ $-\sqrt[3]{6}, \sqrt{3} \in \mathbb{I}$ $\sqrt[4]{-16}$ no es real

Página 33

1 Representa los siguientes conjuntos:

a) $(-3, -1)$ **b)** $[4, +\infty)$ **c)** $(3, 9]$ **d)** $(-\infty, 0)$

e) $\{x / -2 \le x < 5\}$ **f)** $[-2, 5) \cup (5, 7]$ **g)** $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **h)** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



2 Averigua y representa para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:

a) $|x| = 5$ **b)** $|x| \le 5$ **c)** $|x - 4| = 2$

d) $|x - 4| \le 2$ **e)** $|x - 4| > 2$ **f)** $|x + 4| > 5$

a) 5 y –5

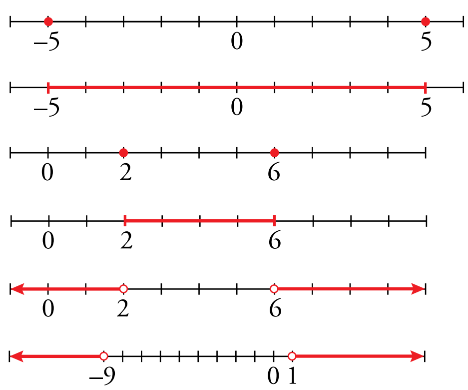
b) $-5 \le x \le 5$; $[-5, 5]$

c) 6 y 2

d) $2 \le x \le 6$; $[2, 6]$

e) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$



3 Radicales. Propiedades

Página 34

1 Simplifica.

a) $\sqrt[9]{x^{12}}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[9]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^4}$ Se dividen índice y exponente entre 3. b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$ d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2 ¿Cuál es mayor, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

Reducimos a índice común: $\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29791}$; $\sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28561}$

Por tanto, es mayor $\sqrt[4]{31}$.

3 Reduce a índice común.

a) $\sqrt[12]{a^5}$ **y** $\sqrt[18]{a^7}$

b) $\sqrt[3]{51}$ **y** $\sqrt[9]{132\,650}$

a) $\sqrt[12]{a^5} = \sqrt[36]{a^{15}}$; $\sqrt[18]{a^7} = \sqrt[36]{a^{14}}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{132\,651}$; $\sqrt[9]{132\,650}$

4 Simplifica.

a) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ **c)** $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $\left(\sqrt[8]{k}\right)^8 = k$ b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

Página 35

5 Reduce.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$ **e)** $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5}$ **f)** $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

e) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5^5} = 5\sqrt[4]{5}$

f) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{(3^4)^2}\,\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^{11}} = 3\sqrt[6]{3^5}$

6 **Simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

a) $\sqrt[15]{\dfrac{x^3}{x^5}} = \sqrt[15]{\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt[15]{x^{-2}}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3 b^3}{a^2 b^2}} = \sqrt[6]{a\,b}$

c) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{a^3 b^5 c}{a^2 b^6 c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc}}$

7 **Reduce.**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt[6]{\dfrac{3^4}{3^3}} = \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[10]{\dfrac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

8 **Suma y simplifica.**

a) $5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$ **b)** $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

d) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$ **e)** $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$ **f)** $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a} = 5\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$

f) Se factorizan los radicandos y se sacan factores de la raíz:

$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} = 0$

Página 36

9 **Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.**

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}$ **f)** $\dfrac{4}{\sqrt{18}}$ **g)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}$ **j)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}} = \dfrac{1}{a\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}} = \dfrac{3}{\sqrt{2 \cdot 5^2}} = \dfrac{3}{5\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{10}$

f) $\dfrac{4}{\sqrt{18}} = \dfrac{4}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{6} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{5}}{5}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{10} = \dfrac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \dfrac{3\sqrt[3]{6}}{6} = \dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$

j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \dfrac{2\sqrt[3]{10}}{10} = \dfrac{\sqrt[3]{10}}{5}$

10 Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ b) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ c) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ d) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ f) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}=\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)}=\sqrt{a}+1$

d) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

e) $\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12}=\dfrac{18+12+12\sqrt{6}}{6}=\dfrac{30+12\sqrt{6}}{6}=5+2\sqrt{6}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{(2-1)+2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

4 Logaritmos. Propiedades

Página 39

1 Halla.

a) $\log_2 16$ **b)** $\log_2 0{,}25$ **c)** $\log_9 1$ **d)** $\log_{10} 0{,}1$

e) $\log_4 64$ **f)** $\log_7 49$ **g)** $\ln e^4$ **h)** $\ln e^{-1/4}$

i) $\log_5 0{,}04$ **j)** $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

b) $\log_2 0{,}25 = \log_2 2^{-2} = -2$

c) $\log_9 1 = 0$

d) $\log_{10} 0{,}1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

g) $\ln e^4 = 4$

h) $\ln e^{-1/4} = -\frac{1}{4}$

i) $\log_5 0{,}04 = \log_5 5^{-2} = -2$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2 Halla la parte entera de…

a) $\log_2 60$. **b)** $\log_5 700$. **c)** $\log_{10} 43\,000$. **d)** $\log_{10} 0{,}084$.

e) $\log_9 60$. **f)** $\ln e$. **g)** $\log_{20} 450\,000$. **h)** $\log_{5,4} 900$.

a) $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $32 < 60 < 64$

$5 < \log_2 60 < 6 \Rightarrow \log_2 60 = 5,\ldots$

b) $5^4 = 625$; $5^5 = 3\,125$; $625 < 700 < 3\,125$

$4 < \log_5 700 < 5 \Rightarrow \log_5 700 = 4,\ldots$

c) $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10\,000 < 43\,000 < 100\,000$

$4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \Rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4,\ldots$

d) $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-1} = 0{,}1$; $0{,}01 < 0{,}084 < 0{,}1$

$-2 < \log_{10} 0{,}084 < -1 \Rightarrow \log_{10} 0{,}084 = -1,\ldots$

e) $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9 < 60 < 81$

$1 < \log_9 60 < 2 \Rightarrow \log_9 60 = 1,\ldots$

f) $\ln e = 1$

g) $\log_{20} 450\,000$; $20^4 = 160\,000$; $20^5 = 3\,200\,000$

Como $20^4 = 160\,000 < 450\,000 < 3\,200\,000 = 20^5 \Rightarrow 4 < \log_{20} 450\,000 < 5$.

La parte entera de $\log_{20} 450\,000$ es 4.

h) $\log_{5,4} 900 = 4{,}0337$

$5{,}4^4 = 850{,}31$; $5{,}4^5 = 4\,591{,}7$

Como $5{,}4^4 = 850{,}31 < 900 < 4\,591{,}7 = 5{,}4^5 \Rightarrow 4 < \log_{5,4} 900 < 5$.

La parte entera de $\log_{5,4} 900$ es 4.

3 **Aplica la propiedad ⑧ para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:**

a) $\boldsymbol{log_2 1\,500}$ **b)** $\boldsymbol{log_5 200}$ **c)** $\boldsymbol{log_{100} 200}$ **d)** $\boldsymbol{log_{100} 40}$

En cada caso, comprueba el resultado utilizando la potenciación.

a) $\dfrac{log\,1500}{log\,2} = 10{,}55;\ \ 2^{10{,}55} \approx 1\,500$

b) $\dfrac{log\,200}{log\,5} = 3{,}29;\ \ 5^{3{,}29} \approx 200$

c) $\dfrac{log\,200}{log\,100} = 1{,}15;\ \ 100^{1{,}15} \approx 200$

d) $\dfrac{log\,40}{log\,100} = 0{,}80;\ \ 100^{0{,}80} \approx 40$

4 **Calcula sabiendo que** $\boldsymbol{log_5 A = 1{,}8}$ **y** $\boldsymbol{log_5 B = 2{,}4}$**.**

a) $\boldsymbol{log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}}$ **b)** $\boldsymbol{log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}}$

a) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}} = \dfrac{1}{3}\ [2\ log_5 A - log_5 25 - log_5 B] = \dfrac{1}{3}\ [2 \cdot 1{,}8 - 2 - 2{,}4] = \dfrac{-0{,}8}{3} \approx -0{,}27$

b) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = log_5 5 + \dfrac{3}{2}\ log_5 A - 2\ log_5 B = 1 + \dfrac{3}{2} \cdot 1{,}8 - 2 \cdot 2{,}4 = 1 + 2{,}7 - 4{,}8 = -1{,}1$

5 **Averigua la relación que hay entre** $\boldsymbol{x}$ **e** $\boldsymbol{y}$**, sabiendo que se verifica:**

$\boldsymbol{ln\ y = 2x - ln\ 5}$

$ln\ y = 2x - ln\ 5 \ \rightarrow\ ln\ y = ln\ e^{2x} - ln\ 5$

$ln\ y = ln\ \dfrac{e^{2x}}{5} \ \rightarrow\ y = \dfrac{e^{2x}}{5}$

5 Expresión decimal de los números reales. Números aproximados

Página 41

1 ¿Verdadero o falso?

I. El precio de esta vivienda es, aproximadamente, de 390 000 €, con un error menor que 10 000 €.

II. El precio del menú del día es, aproximadamente, de 12 €, con un error menor que 1 €.

En I el error absoluto es mucho mayor que en II, pero el error relativo es menor.

I. E.R. $< \dfrac{10000}{390000} = 2{,}5641 \cdot 10^{-2} = 0{,}025641 \to$ E.R. $< 2{,}6\,\%$

II. E.R. $< \dfrac{1}{12} = 8{,}3333 \cdot 10^{-2} = 0{,}08333 \to$ E.R. $< 8{,}3\,\%$

El error absoluto nos lo dicen y es mayor en I que en II. Hemos calculado el error relativo en cada caso y vemos que es verdadera la afirmación.

2 Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:

a) Daniel le dice a su hermana María que la superficie de su casa es de 96,4 m^2.

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana unos 19 000 € al año.

a) E.A. $< 0{,}05$ m^2; E.R. $< \dfrac{0{,}05}{96{,}4} = 5{,}1867 \cdot 10^{-4} = 0{,}00051867 \to$ E.R. $< 0{,}05\,\%$

b) E.A. < 0,5 millones de horas = 500 000 horas

E.R. $< \dfrac{0{,}5}{37} < 0{,}014 = 1{,}4\,\%$

c) — Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 19 mil €, redondeando a los "miles de euros"), entonces:

E.A. < 0,5 miles de € = 500 € E.R. $< \dfrac{0{,}5}{19} < 0{,}027 = 2{,}7\,\%$

— Si suponemos que es 19 000 € exactamente:

E.A. < 0,5 € E.R. $< \dfrac{0{,}5}{19000} < 0{,}000027 = 0{,}0027\,\%$

Página 42

3 Calcula en notación científica sin usar la calculadora:

a) $(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$

a) $(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12} = \left((8 \cdot 10^{5}) : (2 \cdot 10^{-4})\right) \cdot 5 \cdot 10^{11} =$

$= (4 \cdot 10^{9}) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7} = 48{,}6 \cdot 10^{-7} + 0{,}93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} =$

$= 43{,}53 \cdot 10^{-7} = 4{,}353 \cdot 10^{-6}$

4 Opera con la calculadora:

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6})$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9}$

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6}) \approx 5{,}85 \cdot 10^{12}$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9} = 2{,}37 \cdot 10^{-10}$

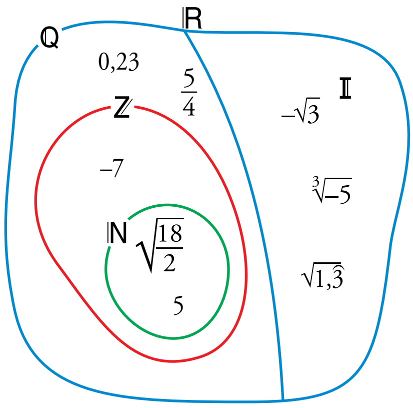
Ejercicios y problemas resueltos

Página 43

1. Conjuntos numéricos

Hazlo tú. **Clasifica los siguientes números:**

$$5;\ -7;\ 0{,}23;\ \frac{5}{4};\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ \sqrt{1{,}\widehat{3}}$$



2. Intervalos y valor absoluto

Hazlo tú. **Indica, en cada caso, qué números cumplen estas condiciones:**

a) $|x+2| \ge 5$ **b)** $|4-x| < 3$

a) $|x+2| \ge 5 \ \rightarrow \ \begin{cases} x+2 \ge 5 \\ x+2 \le -5 \end{cases} \ \rightarrow \ \begin{cases} x \ge 3 \\ x \le -7 \end{cases} \ \rightarrow \ x \in (-\infty, -7] \cup [3, +\infty)$

b) $|4-x| < 3 \ \rightarrow \ -3 < 4-x < 3 \ \rightarrow \ -7 < -x < -1$

Cambiamos de signo:

$1 < x < 7 \ \rightarrow \ x \in (1, 7)$

3. Simplificación de radicales

Hazlo tú. **Simplifica.**

a) $\sqrt[7]{x^{21}}$ **b)** $\sqrt[3]{27} : \sqrt[6]{81}$ **c)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}$

a) $\sqrt[7]{x^{21}} = \sqrt[7]{x^{7\cdot 3}} = x^3$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[6]{81}} = \dfrac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[6]{3^4}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^{3\cdot 2}}}{\sqrt[6]{3^4}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^6}}{\sqrt[6]{3^4}} = \sqrt[6]{3^{6-4}} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[12]{x^2} = \sqrt[6]{x}$

Página 44

4. Operaciones con radicales

Hazlo tú. **Opera y simplifica:**

a) $\sqrt{32} + \dfrac{1}{2}\sqrt{50} - \dfrac{5}{6}\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{8ab} \cdot \sqrt[3]{a^2 b}$

a) Factorizamos y sacamos factores de las raíces:

$$\sqrt{32} + \frac{1}{2}\sqrt{50} - \frac{5}{6}\sqrt{2} = \sqrt{2^5} + \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 5^2} - \frac{5}{6}\sqrt{2} = 2^2\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{5}{6}\sqrt{2} = \frac{17}{3}\sqrt{2}$$

b) Reducimos los radicales a índice común y sacamos factores de las raíces:

$$\sqrt{8ab} \cdot \sqrt[3]{a^2 b} = \sqrt[6]{8^3 a^3 b^3} \cdot \sqrt[6]{(a^2)^2 b^2} = 2\sqrt{2}\sqrt[6]{a^3 b^3}\sqrt[6]{a^4 b^2} = 2\sqrt{2}\sqrt[6]{a^7 b^5} = 2\sqrt{2}\,a\sqrt[6]{ab^5}$$

5. Racionalización de denominadores

Hazlo tú. Racionaliza:

a) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{5^3}}$ **b)** $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$

a) Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[4]{5}$:

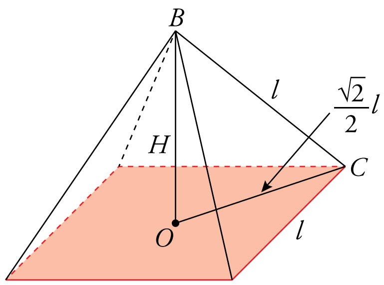
$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{2\sqrt[4]{5}}{5}$$

b) Multiplicamos numerador y denominador por $2\sqrt{5}-3$:

$$\frac{11}{2\sqrt{5}+3} = \frac{11\,(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)\,(2\sqrt{5}-3)} = \frac{11\,(2\sqrt{5}-3)}{4 \cdot 5 - 9} = 2\sqrt{5}-3$$

6. Problemas con radicales

Hazlo tú. El volumen de una pirámide cuadrangular regular es $\dfrac{256}{3}\sqrt{2}$. Halla la longitud de su arista.



La arista de la cara triangular es igual a la arista de la base.

$$V_{Pirámide} = \frac{1}{3}A_{base} \cdot H = \frac{1}{3}l^2 \cdot H = \frac{256}{3}\sqrt{2}$$

La distancia $\overline{OC}$ es la mitad de la diagonal del cuadrado $\overline{OC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}l$.

La arista es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos la altura H y el lado $\overline{OC}$.

Por ser la arista igual al lado de la base, $H^2 = l^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2 = \dfrac{1}{2}l^2$

$$V_{Pirámide} = \frac{1}{3}l^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l = \frac{1}{6}\sqrt{2}\,l^3$$

Por tanto, $\dfrac{1}{6}\sqrt{2}\,l^3 = \dfrac{256}{3}\sqrt{2} \Rightarrow l^3 = 256 \cdot 2 = 512 \Rightarrow l = \sqrt[3]{512} = 8$

Página 45

7. Definición de logaritmo

Hazlo tú. Calcula x:

a) $\boldsymbol{log_x 5 = 1/2}$ **b)** $\boldsymbol{log\, x^2 = -4}$

a) $log_x 5 = \dfrac{1}{2} \to x^{1/2} = 5 \to x = 5^2 \to x = 25$

b) $log\, x^2 = -4 \to 10^{-4} = x^2 \to \dfrac{1}{10^4} = x^2 \to x = \sqrt{\dfrac{1}{10^4}} \to x = \dfrac{1}{10^2} = 10^{-2}$

8. Logaritmos sin calculadora

Hazlo tú. Halla el valor de $log_3 0,\widehat{3}$ y de $log_2 \sqrt{\frac{1}{8}}$ sin utilizar la calculadora.

$$0,\widehat{3} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \rightarrow log_3 3^{-1} = -1$$

$$log_2 \sqrt{\frac{1}{8}} = log_2 \sqrt{\frac{1}{2^3}} = log_2 2^{-3/2} = -\frac{3}{2}$$

9. Propiedades de los logaritmos

Hazlo tú. Si $ln\, k = -1{,}8$, calcula:

a) $ln\,(k^2\sqrt{e})$ **b) $ln\left(\frac{k}{e}\right)^3$**

a) $ln\,(k^2\sqrt{e}) = ln\,k^2 + ln\sqrt{e} = 2\,ln\,k + ln\,e^{1/2} = 2\cdot(-1,8) + \frac{1}{2} = -3,1$

b) $ln\left(\frac{k}{e}\right)^3 = 3\,ln\,\frac{k}{e} = 3\,(ln\,k - ln\,e) = 3\,(-1,8-1) = -8,4$

10. Propiedades de los logaritmos

Hazlo tú. Calcula x en estos casos:

a) $ln\,3^{x-1} = 5$ **b) $2\,log\,x - log\,4 = 2\,log\,3$**

a) $ln\,3^{x-1} = 5$

Aplicamos la propiedad de los logaritmos: $log_a m^n = nlog_a m$.

$(x-1)\,ln\,3 = 5 \rightarrow x-1 = \frac{5}{ln\,3} \rightarrow x = \frac{5}{ln\,3} + 1 \rightarrow x = 5,5512$

b) $2log\,x - log\,4 = 2log\,3$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$log\,x^2 - log\,4 = log\,3^2$

$log\,\frac{x^2}{4} = log\,9;\ \frac{x^2}{4} = 9$

Soluciones: $x = -6$, $x = 6$

Pero como no se pueden tomar logaritmos de números negativos, la única solución válida es $x = 6$.

Página 46

11. Errores y notación científica

Hazlo tú. Expresa el resultado de estas operaciones en notación científica y acota el error absoluto y el error relativo cometidos:

a) $(15\,000\,000 : 0{,}0003)^2 \cdot (0{,}008)^3$

b) $1{,}5 \cdot 10^{-8} + 2{,}4 \cdot 10^{-7} - (1{,}2 \cdot 10^{-4})^2$

a) $(15\,000\,000 : 0,0003)^2 \cdot (0,008)^3 = \left(\frac{15\cdot 10^6}{3\cdot 10^{-4}}\right)^2 \cdot (8\cdot 10^{-3})^3 =$

$$= \frac{(15)^2\cdot 10^{12}}{9\cdot 10^{-8}} \cdot 8^3\cdot 10^{-9} = \frac{(15)^2\cdot 8^3}{9} 10^{12+8-9} = 12\,800\cdot 10^{11} = 1,28\cdot 10^{15}$$

E.A. $< 0{,}005 \cdot 10^{15} = 5 \cdot 10^{12}$

E.R. $< \frac{5\cdot 10^{12}}{1,28\cdot 10^{15}} = 0,0039 = 0,39\ \%$

b) $1{,}5 \cdot 10^{-8} + 2{,}4 \cdot 10^{-7} - (1{,}2 \cdot 10^{-4})^2 = 1{,}5 \cdot 10^{-8} + 2{,}4 \cdot 10^{-7} - 1{,}44 \cdot 10^{-8} =$

$= 1{,}5 \cdot 10^{-8} + 24 \cdot 10^{-8} - 1{,}44 \cdot 10^{-8} = (1{,}5 + 24 - 1{,}44) \cdot 10^{-8} = 24{,}06 \cdot 10^{-8} = 2{,}406 \cdot 10^{-7}$

E.A. $< 0{,}0005 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-11}$

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{-11}}{2{,}406 \cdot 10^{-7}} = 2{,}078 \cdot 10^{-4} = 0{,}0002078 = 0{,}02\,\%$

12. Repartos proporcionales

Hazlo tú. Reparte 1 500 € en partes inversamente proporcionales a 15, 20 y 25.

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25} = \frac{47}{300}$$

Para 15 $\rightarrow \dfrac{x}{1500} = \dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{47}{300}} \rightarrow x = \dfrac{1\,500 \cdot \frac{1}{15}}{\frac{47}{300}} = \dfrac{30\,000}{47} = 638{,}3$ €

Para 20 $\rightarrow \dfrac{x}{1\,500} = \dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{47}{300}} \rightarrow x = \dfrac{1\,500 \cdot \frac{1}{20}}{\frac{47}{300}} = \dfrac{22\,500}{47} = 478{,}72$ €

Para 25 $\rightarrow \dfrac{x}{1\,500} = \dfrac{\frac{1}{25}}{\frac{47}{300}} \rightarrow x = \dfrac{1\,500 \cdot \frac{1}{25}}{\frac{47}{300}} = \dfrac{18\,000}{47} = 382{,}98$ €

Ejercicios y problemas guiados

Página 47

1. Simplificación de radicales

Simplificar esta expresión:

$$\sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{108}}}}$$

$$\sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{2^2 3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 3^3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{1}{6}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{3^2}{6}}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{6}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{3\cdot 2}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

2. Valor de un exponente

Calcular x para que se cumpla la igualdad:

$$3^{x-1} = 173$$

$log_3 3^{x-1} = log_3 173$; $(x-1) log_3 3 = log_3 173$

$x - 1 = log_3 173 = 4{,}69$; $x = 4{,}69 + 1 = 5{,}69$

3. Extracción de factores de un radical

Extraer fuera del radical los factores que sea posible.

$$\sqrt{4a^2 cd + 8abcd + 4b^2 cd}$$

$$\sqrt{4a^2 cd + 8abcd + 4b^2 cd} = \sqrt{cd(4a^2 + 8ab + 4b^2)} = \sqrt{cd(2a+2b)^2} = (2a+2b)\sqrt{cd} = 2(a+b)\sqrt{cd}$$

4. Propiedades de los logaritmos

Averiguar la relación que existe entre M, x e y si sabemos que:

$$ln\, M = \frac{1}{4}(2\, ln\, x + 3\, ln\, y - 5\, ln\, 2)$$

$$ln\, M = \frac{1}{4}(2\, ln\, x + 3\, ln\, y - 5\, ln\, 2) = \frac{1}{4}(ln\, x^2 + ln\, y^3 - ln\, 2^5) = \frac{1}{4} ln \frac{x^2 \cdot y^3}{2^5} = ln \sqrt[4]{\frac{x^2 \cdot y^3}{2^5}}$$

$$M = \sqrt[4]{\frac{x^2 \cdot y^3}{2^5}}$$

5. Cotas de error absoluto y relativo

Acotar el error que se comete al tomar 1,62 como aproximación del número de oro, ϕ.

E.A. < 0,005

$$\text{E.R.} < \frac{0{,}005}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 3{,}0902 \cdot 10^{-3} = 0{,}003$$

Corresponde a un error relativo menor que 0,3 %.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 48

Para practicar

Números racionales e irracionales

1 Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, pertenecen:

$\mathbf{5;\ -7;\ \frac{5}{4};\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ 4,\widehat{7};\ \frac{\pi}{2}}$

$5, \sqrt{\frac{18}{2}} \in \mathbb{N}$ $\quad 5, \sqrt{\frac{18}{2}}, -7 \in \mathbb{Z}$ $\quad 5; \sqrt{\frac{18}{2}}; -7; \frac{5}{4}; 4,\widehat{7} \in \mathbb{Q}$ $\quad 5; \sqrt{\frac{18}{2}}; -7; \frac{5}{4}; 4,\widehat{7}; -\sqrt{3}; \sqrt[3]{-5}; \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

2 ¿Cuáles de estos números son irracionales? Expresa como fracción los que sea posible.

a) 3,181818… **b)** $\mathbf{\sqrt{1,\widehat{7}}}$ **c)** $\mathbf{\sqrt{8}}$

d) 1,020020002… **e) –4,0333…** **f)** $\mathbf{\sqrt[3]{81}}$

g) 1,3999… **h)** $\mathbf{2\pi}$

a) $3,181818\ldots = \frac{318-3}{99} = \frac{315}{99} = \frac{35}{11}$

b) $\sqrt{1,\widehat{7}} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

c) $\sqrt{8}$ Irracional.

d) 1,020020002… Irracional.

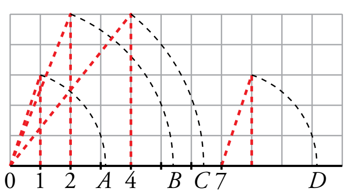
e) $-4,0333\ldots = -\frac{403-40}{90} = -\frac{121}{30}$

f) $\sqrt[3]{81}$ Irracional.

g) $1,3999\ldots = \frac{139-13}{90} = \frac{7}{5}$

h) 2π Irracional.

3



¿Qué números irracionales representan los puntos: *A*, *B*, *C* y *D*? Justifica la respuesta.

$A = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ $\quad B = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$ $\quad C = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ $\quad D = 7 + \sqrt{1^2+3^2} = 7+\sqrt{10}$

4 Indica cuál, de cada par de números, es mayor:

a) $\mathbf{\frac{140}{99}}$ **y** $\mathbf{\sqrt{2}}$ **b)** $\mathbf{0,52\widehat{6}}$ **y** $\mathbf{0,\widehat{526}}$ **c)** $\mathbf{4,\widehat{89}}$ **y** $\mathbf{2\sqrt{6}}$ **d) –2,098 y –2,1**

Redondea a las centésimas los números anteriores.

a) $\sqrt{2}$ b) $0,52\widehat{6}$ c) $4,\widehat{89}$ d) 2,098

Intervalos y valor absoluto

5 **Representa gráficamente y expresa como intervalo o como semirrecta los números que cumplen la condición dada en cada caso.**

a) x **es menor que –5.**

b) 3 es menor o igual que x.

c) x **está comprendido entre –5 y 1.**

d) x **está entre –2 y 0, ambos incluidos.**

e) x **es mayor o igual que –3 y menor que 2.**

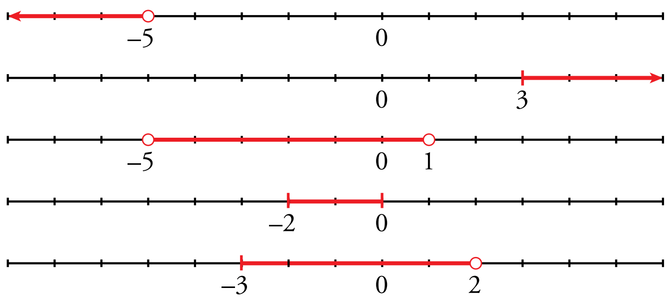
a) $x < -5$; $(-\infty, -5)$

b) $3 \le x$; $[3, +\infty)$

c) $-5 < x < 1$; $(-5, 1)$

d) $-2 \le x \le 0$; $[-2, 0]$

e) $[-3, 2)$; $-3 \le x < 2$



6 **Escribe la desigualdad que verifica todo número** x **que pertenece a estos intervalos o semirrectas:**

a) $[-2, 7]$ **b)** $[13, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 0)$

d) $(-3, 0]$ **e)** $[3/2, 6)$ **f)** $(0, +\infty)$

a) $-2 \le x \le 7$ b) $x \ge 13$ c) $x < 0$

d) $-3 < x \le 0$ e) $\frac{3}{2} \le x < 6$ f) $0 < x < +\infty$

7 **Expresa en forma de intervalo los números que cumplen cada una de estas expresiones:**

a) $|x| < 7$ **b)** $|x| \ge 5$ **c)** $|2x| < 8$

d) $|x - 1| \le 6$ **e)** $|x + 2| > 9$ **f)** $|x - 5| \ge 1$

a) $(-7, 7)$ b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty]$ c) $(-4, 4)$

d) $[-5, 7]$ e) $(-11, 7)$ f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$

8 **Escribe mediante intervalos los posibles valores de** x **para que se pueda calcular la raíz en cada caso.**

a) $\sqrt{x-4}$ **b)** $\sqrt{2x+1}$ **c)** $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3-2x}$ **e)** $\sqrt{-x-1}$ **f)** $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

a) $x - 4 \ge 0 \Rightarrow x \ge 4$; $[4, +\infty)$

b) $2x + 1 \ge 0 \Rightarrow 2x \ge -1 \Rightarrow x \ge -\frac{1}{2}$; $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$

c) $-x \ge 0 \Rightarrow x \le 0$; $(-\infty, 0]$

d) $3 - 2x \ge 0 \Rightarrow 3 \ge 2x \Rightarrow x \le$; $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

e) $-x - 1 \ge 0 \Rightarrow -1 \ge x$; $(-\infty, -1]$

f) $1 + \frac{x}{2} \ge 0 \Rightarrow 2 + x \ge 0 \Rightarrow x \ge -2$; $[-2, +\infty)$

9 **Expresa como un único intervalo.**

a) $(1, 6] \cup [2, 5)$ **b)** $[-1, 3) \cup (0, 3]$ **c)** $(1, 6] \cap [2, 7)$

d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$ **e)** $[-3, 2] \cap [0, 5]$ **f)** $[2, +\infty) \cap (0, 10)$

a) $(1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$

b) $[-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$

c) $(1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$

d) $[-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$

e) $[-3, 2] \cap [0, 5] = [0, 2]$

f) $[2, +\infty) \cap (0, 10) = [2, 10)$

10 **Se llama entorno de centro a y radio r al intervalo $(a - r, a + r)$.**

a) Expresa como intervalos los siguientes entornos: centro 2 y radio 0,25; centro –1 y radio 2.

b) Describe como entornos los siguientes intervalos: $I_1 = (-3, 5)$; $I_2 = (-6, -4{,}4)$.

a) Centro 2 y radio 0,25 $\to$ $(2 - 0{,}25;\ 2 + 0{,}25) = (1{,}75;\ 2{,}25)$

Centro –1 y radio 2 $\to$ $(-1 - 2, -1 + 2) = (-3, 1)$

b) $I_1 = (-3, 5)$; centro: $\dfrac{-3+5}{2} = 1$; radio $= 5 - 1 = 4$

I_1 es un entorno de centro 1 y radio 5.

$I_2 = (-6, -4{,}4)$; centro: $\dfrac{-4{,}4+(-6)}{2} = -5{,}2$; radio $= -4{,}4 - (-5{,}2) = 0{,}8$

I_2 es un entorno de centro –5,2 y radio 0,8.

Potencias

11 **Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:**

a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

a) $a^{2/5} \cdot a^{1/2} = a^{9/10} = \sqrt[10]{a^9}$

b) $\dfrac{x^{2/3}}{x^{1/2}} = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}$

c) $a^{-3/4} = \sqrt[4]{a^{-3}}$

12 **Resuelve, sin utilizar calculadora:**

a) $\sqrt[5]{32}$ **b)** $\sqrt[3]{343}$ **c)** $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt{0{,}25}$ **e)** $\sqrt[3]{8^4}$ **f)** $\sqrt[3]{0{,}001}$

a) $\sqrt[5]{2^5} = 2$ b) $\sqrt[3]{7^3} = 7$ c) $\sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ e) $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$ f) $\sqrt[3]{0{,}1^3} = 0{,}1$

13 **Expresa como una potencia de base 2:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $(-32)^{1/5}$ **c)** $(\sqrt[8]{2})^4$

a) $2^{-1/2}$ b) $(-2^5)^{1/5} = -2$ c) $2^{4/8} = 2^{1/2}$

14 **Calcula utilizando potencias de base 2, 3 y 5:**

a) $4 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)^3$ **b)** $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \dfrac{1}{8}$

c) $\dfrac{(-5)^3 \cdot (-8)^3 \cdot (-9)^2}{15^2 \cdot 20^4}$ **d)** $\dfrac{(-30)^{-1} \cdot 15^2}{10^3}$

a) $2^2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(-3)^3}{2^3} = \dfrac{-3^2}{2} = \dfrac{-9}{2}$

b) $\dfrac{1}{2^4} \cdot \dfrac{3^2}{2} \cdot \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{3^2}{2^8} = \dfrac{9}{256}$

c) $\dfrac{(-5)^3 \cdot (-2^3)^3 \cdot (-3^2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2 \cdot 5)^4} = \dfrac{5^3 \cdot 2^9 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^8 \cdot 5^4} = \dfrac{2 \cdot 3^2}{5^3} = \dfrac{18}{125}$

d) $\dfrac{3^2 \cdot 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = -\dfrac{3}{5^2 \cdot 2^4} = \dfrac{-3}{400}$

15 **Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:**

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$ **b)** $16^{1/4}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[6]{4}}$

a) $\dfrac{a^{3/4}\cdot a^{-1}}{a\cdot a^{1/2}} = a^{-7/4} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{a^7}}$

b) $(2^4)^{1/4}\cdot(2^2)^{-1/3}\cdot(2^2)^{-1/6} = 2\cdot 2^{-2/3}\cdot 2^{-1/3} = 2^0 = 1$

16 **Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:**

a) $\dfrac{3^6\cdot 2^5\cdot 5^2}{9^3\cdot 4^3\cdot 5}$ **b)** $\dfrac{3^4\cdot 16\cdot 9^{-1}}{5^{-1}\cdot 3^5}$

c) $\dfrac{15^2\cdot 8^{-1}}{6^3\cdot 10^2}$ **d)** $\dfrac{a^{-3}\cdot b^{-4}\cdot c^7}{a^{-5}\cdot b^2\cdot c^{-1}}$

a) $\dfrac{3^6\cdot 2^5\cdot 5^2}{3^6\cdot 2^6\cdot 5} = \dfrac{5}{2}$

b) $\dfrac{3^4\cdot 2^4\cdot 3^{-2}}{5^{-1}\cdot 3^5} = \dfrac{2^4\cdot 5}{3^3} = \dfrac{80}{27}$

c) $\dfrac{3^2\cdot 5^2\cdot 2^{-3}}{2^3\cdot 3^3\cdot 2^2\cdot 5^2} = \dfrac{1}{2^8\cdot 3} = \dfrac{1}{768}$

d) $\dfrac{c^7\,a^5\,c}{a^3\,b^4\,b^2} = \dfrac{a^2\,c^8}{b^6}$

Página 49

Radicales

17 **Introduce los factores dentro de cada raíz.**

a) $2\sqrt[3]{3}$ **b)** $4\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ **c)** $\dfrac{2}{x}\sqrt{\dfrac{3x}{8}}$

d) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{25}{9}}$ **e)** $2\sqrt[4]{4}$ **f)** $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3\cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{4^3}{4}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\dfrac{2^2\cdot 3x}{x^2\cdot 2^3}} = \sqrt{\dfrac{3}{2x}}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{3^3\cdot 5^2}{5^3\cdot 3^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4\cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{3\cdot 5}{5^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{25}}$

18 **Saca de la raíz el factor que puedas.**

a) $\sqrt[3]{16}$ **b)** $4\sqrt{8}$ **c)** $\sqrt{1\,000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$ **e)** $\sqrt{\dfrac{125a^2}{16b}}$ **f)** $\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\dfrac{16}{a^3}}$ **h)** $\sqrt{4a^2+4}$ **i)** $\sqrt{\dfrac{a}{9}+\dfrac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $4\sqrt{2^3} = 4\cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2^3\cdot 5^3} = 10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3\cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt{\dfrac{5^3\cdot a^2}{2^4\cdot b}} = \dfrac{5a}{4}\sqrt{\dfrac{5}{b}}$

f) $\sqrt{\dfrac{13}{36}} = \dfrac{1}{6}\sqrt{13}$

g) $\dfrac{4}{a}\sqrt{\dfrac{1}{a}}$

h) $\sqrt{4(a^2+1)} = 2\sqrt{a^2+1}$

i) $\sqrt{\dfrac{25a}{16\cdot 9}} = \dfrac{5\sqrt{a}}{12}$

19 Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{24}$ **b)** $\sqrt[6]{27}$ **c)** $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$ **e)** $\sqrt[4]{\dfrac{81}{64}}$ **f)** $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

g) $\sqrt[6]{0,027}$ **h)** $\sqrt[8]{0,0016}$ **i)** $\sqrt[4]{1+\dfrac{9}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

c) $-\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = -3\sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[4]{\dfrac{3^4}{2^6}} = \dfrac{3}{\sqrt{2^3}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

f) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$

g) $\sqrt[6]{0,027} = \sqrt[6]{10^{-3}3^3} = \sqrt[6]{\dfrac{3^3}{10^3}} = \sqrt{\dfrac{3}{10}}$

h) $\sqrt[6]{0,0016} = \sqrt[8]{10^{-4}2^4} = \sqrt[8]{\dfrac{2^4}{10^4}} = \sqrt{\dfrac{2}{10}}$

i) $\sqrt[4]{1+\dfrac{9}{16}} = \sqrt[4]{\dfrac{25}{16}} = \sqrt[4]{\dfrac{5^2}{2^4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

20 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor.

a) $\sqrt[4]{5},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{6},\ \sqrt[3]{4}$ **c)** $\sqrt[4]{6},\ \sqrt[5]{10}$ **d)** $\sqrt[4]{20},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{5^3},\ \sqrt[12]{3^4},\ \sqrt[12]{2^6};\ \sqrt[12]{125},\ \sqrt[12]{81},\ \sqrt[12]{64} \ \to\ \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[6]{216},\ \sqrt[6]{16} \ \to\ \sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7\,776},\ \sqrt[20]{10\,000} \ \to\ \sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{20^3},\ \sqrt[12]{9^4},\ \sqrt[12]{100^2}$; tenemos $\sqrt[12]{10\,000};\ \sqrt[12]{6\,561};\ \sqrt[12]{8\,000} \ \to\ \sqrt[3]{9} < \sqrt[6]{100} < \sqrt[4]{20}$

21 Realiza la operación y simplifica, si es posible.

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$ **b)** $2\sqrt{\dfrac{4}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{27}{8}}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$ **e)** $(\sqrt[6]{32})^2$ **f)** $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27 \cdot 6} = 20\sqrt{3^3 \cdot 2 \cdot 2} = 20\sqrt{2 \cdot 3^4} = 180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\dfrac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8}} = 2\sqrt{\dfrac{9}{2}} = 6\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2}{8}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\left(\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}\right)^2 = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$

e) $\left(\sqrt[6]{2^5}\right)^3 = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} : \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} = 2$

22 Efectúa y simplifica, si es posible.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}} \cdot \sqrt{a}$ **c)** $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ **d)** $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt{\sqrt[3]{4}}$

a) $\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\dfrac{2^5}{2^9}}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{2^4}}\right)^3 = \sqrt[6]{\dfrac{1}{2^{12}}} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 3}} : \sqrt{\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

23 Expresa con una única raíz.

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ **c)** $\left(\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}\right) : \sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\dfrac{a^{15} \cdot a^{16}}{a^{10}}} = \sqrt[20]{a^{21}} = a\sqrt[20]{a}$

24 Racionaliza los denominadores y simplifica.

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ **b)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ **f)** $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3\cdot 2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt[3]{2^2}}{2}=\sqrt[3]{4}$

c) $\dfrac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

d) $\dfrac{3(3-\sqrt{3})}{9-3}=\dfrac{9-3\sqrt{3}}{6}=\dfrac{3(3-\sqrt{3})}{2\cdot 3}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{72}-\sqrt{8})\sqrt{6}}{6}=\frac{(\sqrt{2^3 3^2}-\sqrt{2^3})\sqrt{6}}{6}=\frac{4\sqrt{12}}{6}=\frac{8\sqrt{3}}{6}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

f) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}=5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$$

25 Simplifica.

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\dfrac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\dfrac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $-\sqrt{54}+3\sqrt{24}-\sqrt{150}+\sqrt{294}$

a) $25\sqrt{5}+18\sqrt{5}-14\sqrt{5}+6\sqrt{5}=35\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2^4}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\dfrac{21}{5}\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=2\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-\dfrac{21}{5}\cdot 5\sqrt[3]{2}=-15\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{2\cdot 3^3}+3\sqrt{2^3\cdot 3}-\sqrt{2\cdot 3\cdot 5^2}+\sqrt{2\cdot 3\cdot 7^2}=-3\sqrt{2\cdot 3}+2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}-5\sqrt{2\cdot 3}+7\sqrt{2\cdot 3}=5\sqrt{6}$

26 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{72}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{2}{5}}-4\sqrt{\dfrac{18}{125}}+\dfrac{7}{2}\sqrt{\dfrac{8}{45}}$ **c)** $\dfrac{7}{5}\sqrt[3]{81a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\dfrac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+6\sqrt{2}=9\sqrt{2}-\sqrt{3}$

b) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}-4\sqrt{\dfrac{2\cdot 3^2}{5^3}}+\dfrac{7}{2}\sqrt{\dfrac{2^3}{3^2\cdot 5}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}-4\dfrac{3}{5}\sqrt{\dfrac{2}{5}}+\dfrac{7}{2}\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{5}}=$

$=\sqrt{\dfrac{2}{5}}-\dfrac{12}{5}\sqrt{\dfrac{2}{5}}+\dfrac{7}{3}\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\left(1-\dfrac{12}{5}+\dfrac{7}{3}\right)\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{14}{15}\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

c) $\dfrac{7}{5}\sqrt[3]{3^4a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\dfrac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\dfrac{7}{5}3\sqrt[3]{3a}-2a\sqrt[3]{3a}-\dfrac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\left(\dfrac{21}{5}-2a-\dfrac{1}{5}\right)\sqrt[3]{3a}=(4-2a)\sqrt[3]{3a}$

27 Efectúa y simplifica.

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-1)$ **b)** $(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{6})$ **c)** $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$ **d)** $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\sqrt{3}$

a) $\sqrt{12}-\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

b) $5-6=-1$

c) $20+18-12\sqrt{10}=38-12\sqrt{10}$

d) $(2-1)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

28 Racionaliza y simplifica.

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ **b)** $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ **c)** $\dfrac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$ **e)** $\dfrac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ **f)** $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}-2}{3\cdot 2}=\dfrac{2(\sqrt{6}-1)}{3\cdot 2}=\dfrac{\sqrt{6}-1}{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2\cdot 3}}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{6+\sqrt{6}}{6}=1+\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4}=-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$

d) $\dfrac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\dfrac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4}=3(\sqrt{5}+2)=3\sqrt{5}+6$

e) $\dfrac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}\cdot\dfrac{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}=\dfrac{13\sqrt{10}(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{5-9\cdot 2}=\dfrac{65\sqrt{2}+78\sqrt{5}}{-13}=-5\sqrt{2}-6\sqrt{5}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)}=\dfrac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4}=\dfrac{9\sqrt{2\cdot 3^2}-4\sqrt{2}}{23}=\dfrac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23}=\dfrac{23\sqrt{2}}{23}=\sqrt{2}$

29 Efectúa y simplifica.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

b) $\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}=\dfrac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2}=-2\sqrt{35}$

Logaritmos

30 Expresa como potencia de la base y calcula aplicando la definición de logaritmo.

a) $\log_2 1\,024$ **b)** $\log 0{,}001$ **c)** $\log_2 \dfrac{1}{64}$

d) $\log_{\sqrt{3}} 3$ **e)** $\log_3 \sqrt{3}$ **f)** $\log_2 \sqrt{8}$

g) $\log_{1/2} \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **h)** $\log_\pi 1$ **i)** $\ln \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

a) $\log_2 2^{10}=10$ b) $\log 10^{-3}=-3$ c) $\log_2 2^{-6}=-6$

d) $\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^2=2$ e) $\log_3 3^{1/2}=\dfrac{1}{2}$ f) $\log_2 2^{3/2}=\dfrac{3}{2}$

g) $\log_{1/2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1/2}=-\dfrac{1}{2}$ h) 0 i) $\ln e^{-1/3}=-\dfrac{1}{3}$

31 Calcula la base de estos logaritmos:

a) $\log_x 125=3$ **b)** $\log_x \dfrac{1}{9}=-2$ **c)** $\log_x \dfrac{1}{4}=2$

d) $\log_x 2=\dfrac{1}{2}$ **e)** $\log_x 0{,}04=-2$ **f)** $\log_x 4=-\dfrac{1}{2}$

a) $x^3=125 \to x=5$ b) $x^{-2}=\dfrac{1}{9} \to x=3$ c) $x^2=\dfrac{1}{4} \to x=\dfrac{1}{2}$

d) $x^{1/2}=2 \to x=4$ e) $x^{-2}=0{,}04 \to x=5$ f) $x^{-1/2}=4 \to x=\dfrac{1}{16}$

32 **Calcula el valor de x en estas igualdades:**

a) $\log 3^x = 2$ b) $\log x^2 = -2$ c) $7^x = 115$

d) $5^{-x} = 3$ e) $\log_7 3x = 0{,}5$ f) $3^{2+x} = 172$

a) $x = \dfrac{2}{\log 3} = 4{,}19$ b) $2\log x = -2 \to x = \dfrac{1}{10}$ c) $x = \dfrac{\log 115}{\log 7} = 2{,}438$

d) $x = -\dfrac{\log 3}{\log 5} = -0{,}683$ e) $7^{0,5} = 3x \to x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ f) $2 + x = \log_3 172 \to x = \log_3 172 - 2$

33 **Halla con la calculadora y comprueba el resultado mediante potenciación.**

a) $\log \sqrt{148}$ b) $\ln (2{,}3 \cdot 10^{11})$ c) $\ln (7{,}2 \cdot 10^{-5})$

d) $\log_3 42{,}9$ e) $\log_5 1{,}95$ f) $\log_2 0{,}034$

a) 1,085

b) $\ln (2{,}3 \cdot 10^{11}) \approx 26{,}16 \to e^{26,161} \approx 2{,}3 \cdot 10^{11}$

c) $\ln (7{,}2 \cdot 10^{-5}) \approx -9{,}54 \to e^{-9,54} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-5}$

d) $3{,}42 \to 3^{3,42} \approx 42{,}9$

e) $0{,}41 \to 5^{0,41} \approx 1{,}95$

f) $-4{,}88 \to 2^{-4,88} \approx 0{,}034$

Página 50

34 **Desarrolla las siguientes expresiones:**

a) $\log \dfrac{a^2 \sqrt[5]{b^3}}{100c^4}$ b) $\ln \dfrac{\sqrt[4]{x^3} \cdot e^5}{\sqrt{y}}$

a) $\log a^2 \sqrt[5]{b^3} - \log 100c^4 = \log a^2 + \log \sqrt[5]{b^3} - \log 10^2 - \log c^4 = 2\log a + \dfrac{3}{5}\log b - 2 - 4\log c$

b) $\ln \dfrac{\sqrt[4]{x^3}\, e^5}{\sqrt{y}} = \ln \sqrt[4]{x^3}\, e^5 - \ln \sqrt{y} = \ln \sqrt[4]{x^3} + \ln e^5 - \ln \sqrt{y} = \dfrac{3}{4}\ln x + 5 - \dfrac{1}{2}\ln y$

35 **Sabiendo que $\log x = 0{,}28$ calcula el valor de:**

a) $\log \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{100}$ b) $\log 1\,000x^3$ c) $\log \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ d) $\log 10x + \log \dfrac{1}{x^2}$

a) $\log \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{100} = \log \dfrac{x^{2/3}}{100} = \log x^{2/3} - \log 100 = \dfrac{2}{3}\log x - 2 = \dfrac{2}{3} \cdot 0{,}28 - 2 = -1{,}8133$

b) $\log 1\,000x^3 = \log 1\,000 + \log x^3 = \log 1\,000 + 3\log x = 3 + 3 \cdot 0{,}28 = 3{,}84$

c) $\log \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \log 1 - \log x^{1/2} = 0 - \dfrac{1}{2}\log x = -\dfrac{1}{2} \cdot 0{,}28 = -0{,}14$

d) $\log 10x + \log \dfrac{1}{x^2} = \log 10 + \log x + \log 1 - 2\log x = 1 + 0{,}28 + 0 - 2 \cdot 0{,}28 = 0{,}72$

36 **Halla el valor de x en estas expresiones:**

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$ b) $\log x = \log 36 - \log 9$

c) $\ln x = 3 \ln 5 - 2 \ln 10$ d) $\log x = 3 \log 2 - \dfrac{1}{2} \log 25$

a) $\ln x = \ln (17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $\log x = \log \dfrac{36}{9} \Rightarrow x = \dfrac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = \ln 5^3 - \ln 10^2;\ \ln x = \ln \dfrac{5^3}{10^2};\ x = \dfrac{5^3}{5^2 \cdot 2^2};\ x = \dfrac{5}{2^2} = \dfrac{5}{4}$

d) $\log x = \log 2^3 - \log 25^{1/2};\ \log x = \log 2^3 - \log 5;\ \log x = \log \dfrac{8}{5};\ x = \dfrac{8}{5}$

37 **Si $log\ k = x$, escribe en función de x.**

a) $log\ 100k$

b) $log\ \dfrac{k}{1000}$

c) $log\ k^3$

d) $log\ \sqrt[3]{10k}$

e) $log\ \dfrac{1}{k}$

f) $(log\ k)^{1/2}$

a) $log\ 100 + log\ k = 2 + x$

b) $log\ k - log\ 1\,000 = x - 3$

c) $3log\ k = 3x$

d) $\dfrac{1}{3}(log\ 10 + log\ k) = \dfrac{1}{3}(1 + x)$

e) $log\ 1 - log\ k = 0 - x = -x$

f) $\sqrt{x}$

38 **Averigua, en cada caso, la relación entre x, y, z.**

a) $log\ z = 2\ log\ x - log\ y$

b) $log\ z = 2 - log\ x - \dfrac{1}{2}\ log\ y$

c) $log\ z = 1 - \dfrac{1}{2}\ (log\ x - log\ y)$

d) $ln\ z = 1 - 2\ ln\ x + 2\ ln\ y$

a) $log\ z = log\ x^2 - log\ y;\ \ log\ z = log\ \dfrac{x^2}{y};\ \ z = \dfrac{x^2}{y}$

b) $log\ z = log\ 10^2 - log\ x - log\ \sqrt{y};\ \ log\ z = log\ \dfrac{100}{x\sqrt{y}};\ \ z = \dfrac{100}{x\sqrt{y}}$

c) $log\ z = log\ 10 - \dfrac{1}{2}\ log\dfrac{x}{y};\ \ log\ z = log\ 10 - log\sqrt{\dfrac{x}{y}};\ \ log\ z = log\dfrac{10}{\sqrt{\dfrac{x}{y}}};\ \ z = \dfrac{10\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

d) $ln\ z = ln\ e - ln\ x^2 + ln\ y^2;\ \ ln\ z = ln\dfrac{e \cdot y^2}{x^2};\ \ z = \dfrac{e \cdot y^2}{x^2}$

Notación científica y errores

39 **Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.**

a) $\dfrac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4})\, 8,3 \cdot 10^8}{4,32 \cdot 10^3}$

b) $\dfrac{(12,5 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^9)\,(3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^6}$

c) $\dfrac{5,431 \cdot 10^3 - 6,51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

a) $1,41 \cdot 10^2$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^2 = 0,5$

E.R. $< \dfrac{0,5}{141} < 0,00355$

b) $-1,58 \cdot 10^5$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^2$

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^2}{1,58 \cdot 10^5} < 3,16 \cdot 10^{-3}$

c) $-2,65 \cdot 10^6$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^3$

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^3}{2,65 \cdot 10^6} < 1,89 \cdot 10^{-3}$

40 **Expresa en notación científica y calcula:** $\dfrac{60\,000^3 \cdot 0,00002^4}{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0,0002^5}$

$$\frac{(6 \cdot 10^4)^3 \cdot (2 \cdot 10^{-5})^4}{10^4 \cdot 7,2 \cdot 10^7 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^5} = 150$$

41 **Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén.**

a) $3{,}27 \cdot 10^{13}$; $85{,}7 \cdot 10^{12}$; $453 \cdot 10^{11}$

b) $1{,}19 \cdot 10^{-9}$; $0{,}05 \cdot 10^{-7}$; $2\,000 \cdot 10^{-12}$

a) $8{,}57 \cdot 10^{13} > 4{,}53 \cdot 10^{13} > 3{,}27 \cdot 10^{13}$

b) $5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1{,}19 \cdot 10^{-9}$

Para resolver

42 **Un depósito de agua tiene dos grifos. Si los abrimos a la vez, el depósito se llena en dos horas. Si abrimos solo el primero, se llena en seis horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si abrimos solamente el segundo grifo?**

Llamamos x = n.º de horas que tarda en llenar el depósito el segundo grifo.

El primer grifo llena $\frac{1}{6}$ del depósito en una hora.

El segundo grifo llena $\frac{1}{x}$ del depósito en una hora.

Los dos juntos llenan $\frac{1}{2}$ del depósito en una hora.

Por otra parte, los dos juntos, en una hora, llenan $\frac{1}{6} + \frac{1}{x}$. Por tanto:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{x} \rightarrow \frac{3x}{6x} = \frac{x}{6x} + \frac{6}{6x} \rightarrow 3x = x + 6 \rightarrow x = 3$$

El segundo grifo tarda 3 horas en llenar el depósito.

43 **En un concurso se reparten 20 000 € entre las tres personas que han tardado menos tiempo en realizar una prueba. La primera ha tardado 4 minutos; la segunda, 5 minutos, y la tercera, 8 minutos. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada una si el reparto es inversamente proporcional al tiempo invertido?**

Debemos repartir 20 000 € de forma inversamente proporcional al tiempo empleado:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{10}{40} + \frac{8}{40} + \frac{5}{40} = \frac{23}{40} \text{ tardarían entre los tres}$$

Al primero le corresponde $\frac{20\,000 \cdot 10}{23} = 8\,694{,}65$ €

Al segundo le corresponde $\frac{20\,000 \cdot 8}{23} = 6\,956{,}52$ €

Al tercero le corresponde $\frac{20\,000 \cdot 5}{23} = 4\,347{,}83$ €

44 **Varios amigos se reúnen en un bar, toman 15 refrescos y pagan 18,75 € en total. Uno de ellos tomó solo un refresco, otro tomó dos y el resto tomaron 3 refrescos cada uno. ¿Cuántos amigos fueron y cuánto tuvo que pagar cada uno?**

18,75 : 15 = 1,25 € por refresco.

1,25 paga el primero; 2,5 paga el segundo $\rightarrow$ 3,75 € entre los dos.

Los restantes toman 15 – 3 = 12 refrescos.

12 : 3 = 4 amigos, y cada uno paga 3,75 €.

Son 6 en total. Pagan 1,25 €, 2,5 € y los otros cuatro, 3,75 € cada uno.

45 **En una granja hay 75 gallinas que consumen 450 kg de maíz en 30 días. Para aumentar la producción de huevos, se aumenta el número de gallinas a 200 y se compran 800 kg de maíz. ¿Cuántos días se podrá dar de comer a las gallinas?**

450 : 30 = 15; 15 : 75 = 0,2 kg de maíz es lo que come una gallina en un día.

200 · 0,2 = 40 kg por día para alimentar 200 gallinas.

800 : 40 = 20 días podrán comer las gallinas.

46 **Un empleado puede hacer los 2/3 de un trabajo en 8 días trabajando 5 horas diarias, y otro, los 3/4 del mismo trabajo en 6 días de 7 horas de trabajo. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos juntos en hacer el trabajo, dedicando 6 horas diarias?**

Para hacer todo el trabajo el primero tarda: $5 \cdot 8 \cdot \frac{3}{2} = 60$ horas.

Y el segundo: $7 \cdot 6 \cdot \frac{4}{3} = 56$ horas.

En 1 hora los dos juntos hacen: $\frac{1}{60} + \frac{1}{56} = \frac{29}{840}$.

Para hacer todo el trabajo tardan: $\frac{840}{29} \approx 28{,}96$ horas.

28,96 : 6 ≈ 4 días 4 horas 58 minutos

47 **Dos amigas, trabajando juntas, emplearían 3 días para hacer un trabajo. Después del primer día, una de las dos lo tiene que dejar. Continúa la otra sola y tarda 6 días en acabar el trabajo. ¿En cuántos días haría el trabajo cada una aisladamente?**

Después del primer día quedan por hacer los 2/3 y como la segunda amiga tarda 6 días, para hacer todo el trabajo tardaría $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ días.

La primera hace por día $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ del trabajo.

Por tanto, tardaría en hacer todo el trabajo $\frac{9}{2} = 4{,}5$ días.

48 **Dos poblaciones A y B distan 350 km. A la misma hora sale un autobús de A hacia B a una velocidad de 80 km/h y un turismo de B hacia A a 120 km/h. ¿Cuándo se cruzarán?**

Si se aproximan a 80 + 120 = 200 km/h, en recorrer 350 km tardarán:

$t = \frac{350}{200} = 1{,}75$ horas = 1 hora y 45 minutos.

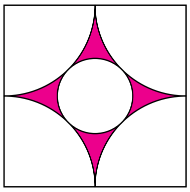
49 **Un automóvil tarda 3 horas en ir de A a B y otro tarda 5 horas en ir de B a A. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse si salen simultáneamente cada uno de su ciudad.**

El primero recorre 1/3 del camino en 1 hora.

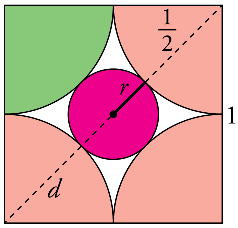
El segundo recorre 1/5 del camino en 1 hora.

Entre los dos recorren: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ del camino en 1 hora.

Tardarán $\frac{15}{8}$ h = 1 h 52' 30'' en encontrarse.

50 

Halla el área de la parte coloreada de esta figura en el que el lado del cuadrado mide 1 m. Expresa el área en decímetros cuadrados con tres cifras significativas y acota el error cometido.



El área pedida es el área del cuadrado, menos cuatro veces el área verde y menos el área roja.

Cuatro veces el área verde es el área de un círculo de radio $\frac{1}{2}$, es decir, $4A_{Verde} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi$

Llamamos d a la diagonal del cuadrado: $d = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Calculamos el radio: $r = \frac{d}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$

El área roja es el área del círculo de radio $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

$$A_{Roja} = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$$

$$\text{\textit{Área pedida}} = A_{Cuadrado} - 4A_{Verde} - A_{Roja} = 1 - \frac{1}{4}\pi - \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi - \pi + 1 = 7{,}9849 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2 = 7{,}98\ \text{dm}^2$$

E.A. $< 0{,}005\ \text{dm}^2$

E.R. $< \frac{0{,}005}{7{,}9849 \cdot 10^{-2}} = 6{,}2618 \cdot 10^{-2} = 0{,}062618$, que equivale al 6,26 %.

Página 51

51 **La estación espacial Mir estuvo en órbita casi 15 años y durante ese tiempo dio, aproximadamente, 86 500 vueltas alrededor de la Tierra, a una altura media de 400 km. Calcula la distancia total recorrida por la Mir en esos 15 años. Redondea el resultado a las decenas de millón y da una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometidos.**

El radio medio de la Tierra es de 6 371 km.

La longitud de una vuelta del satçelite es $2\pi \cdot (400 + 6\,371) = 13\,542\ \pi$ km.

El total de kilómetros recorridos es:

$$13\,542\pi \cdot 86\,500 \approx 3{,}68 \cdot 10^9 = 368 \text{ decenas de millón}$$

E.A. $< 0{,}5 \cdot 10^7$

E.R. $< \frac{0{,}5 \cdot 10^7}{3{,}68 \cdot 10^9} = 1{,}3587 \cdot 10^{-3} = 0{,}0013 = 0{,}13\ \%$

52 La longitud de una barra metálica después de calentarla es $l = l_0(1 + kt)$ donde l_0 es la longitud a 0 °C, t la temperatura final y k el coeficiente de dilatación lineal. Si una barra de plomo mide 1 m a 800 °C, ¿cuál es su longitud a 200 °C? (En el plomo $k = 3 \cdot 10^{-5}$).

Calculamos l_0 a partir de la longitud de la barra a 800 °C:

$$l = l_0(1 + kt) = l_0(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 800) = l_0\left(\frac{128}{125}\right), \text{ luego } l_0 = \frac{125}{128}$$

Calculamos ahora la longitud de la barra a 200 ºC:

$$l = l_0(1 + kt) = \frac{125}{128}(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 200) = \frac{125}{128} \cdot \frac{503}{500} = \frac{503}{512} = 0{,}98242 \text{ m}$$

53 La estrella R136a1, descubierta recientemente, está a 165 000 años-luz y tiene una masa actual equivalente a 265 veces la masa del Sol. Expresa la distancia en kilómetros y la masa en kilogramos. Da, en cada caso, cotas del error absoluto y del error relativo.

Un año luz es aproximadamente $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km.

La distancia de la estrella R136a1 a la Tierra es: $d = 165\,000 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 1{,}5\,609 \cdot 10^{18}$ km

E.A. $< 5 \cdot 10^{13}$ km

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{13}}{1{,}5609 \cdot 10^{18}} = 3{,}2033 \cdot 10^{-5} = 0{,}000032$, que equivale al 0,0032 %.

La masa del Sol es, aproximadamente, $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg.

La masa de la estrella R136a1 es: $m = 265 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} = 5{,}2711 \cdot 10^{32}$ kg

E.A. $< 5 \cdot 10^{27}$ kg

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{27}}{5{,}2711 \cdot 10^{32}} = 9{,}4857 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000094857$, que equivale al 0,00095 %.

54 El volumen de un cubo es $6\sqrt{6}$ cm³. Halla:

a) Su arista. **b) La diagonal de una cara.** **c) La diagonal del cubo.**

Da, en cada caso, el valor exacto.

a) $V_{\text{CUBO}} = a^3 = 6\sqrt{6} = \sqrt{6^3} \rightarrow a = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt{6}$

b) Diagonal de una cara $\rightarrow \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{6 + 6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

c) Diagonal del cubo $\rightarrow \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{6 + 6 + 6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

55 La superficie de un tetraedro es $9\sqrt{3}$ cm². Calcula su arista y su volumen. Da el valor exacto.

Un tetraedro tiene cuatro caras iguales. Llamamos a a la arista.

La superficie de cada cara es $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ cm².

Cada cara es un triángulo equilátero cuya altura es $\sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2}$.

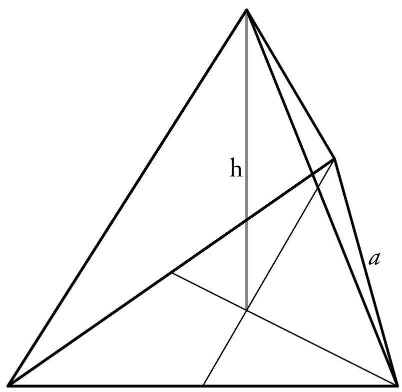
La superficie de cada cara es: $S_{\text{CARA}} = \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{4}$.

Por tanto, $\dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4} \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3$.

Como a es una longitud, $a = 3$ cm.

La altura del tetraedro es: $h = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2}}{3} \cdot 2 = \dfrac{\sqrt{3}\,a}{3} = \sqrt{3}$

$V = \dfrac{1}{3}A_{\text{BASE}} \cdot h = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{9\sqrt{3}}{4}\sqrt{3} = \dfrac{9}{4}$ cm³.



Cuestiones teóricas

56 Explica si estas frases son verdaderas o falsas:

a) Hay números irracionales que son enteros.

b) Todo número irracional es real.

c) Todos los números decimales son racionales.

d) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.

a) Falso. Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

b) Verdadero.

c) Falso. El número π es decimal pero no es racional, puesto que no puede expresarse como cociente de dos números enteros.

d) Verdadero.

57 Si $x \neq 0$, explica si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) x^{-2} es negativo si lo es x.

b) $\sqrt[3]{x}$ tiene el mismo signo que x.

c) Si $x > 0$ entonces $\sqrt{x} < x$.

a) Falsa, $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ siempre es positivo por ser el exponente par, independientemente del signo de x.

b) Verdadera, porque el índice de la raíz es impar.

c) Falsa, $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4}$

58 ¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:

a) $log\, m + log\, n = log\,(m + n)$

b) $log\, m - log\, n = \dfrac{log\, m}{log\, n}$

c) $log\, m - log\, n = log\, \dfrac{m}{n}$

d) $log\, x^2 = log\, x + log\, x$

e) $log\,(a^2 - b^2) = log\,(a + b) + log\,(a - b)$

a) Falso. $log\, m + log\, n = log\,(m \cdot n) \neq log\,(m + n)$

b) Falso. $log\, m - log\, n = log \left(\dfrac{m}{n}\right) \neq \dfrac{log\, m}{log\, n}$

c) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.

d) Verdadero. $log\, x^2 = log\,(x \cdot x) = log\, x + log\, x$

e) Verdadero. $log\,(a^2 - b^2) = log\,[(a + b) \cdot (a - b)] = log\,(a + b) + log\,(a - b)$

Autoevaluación

1 **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ pertenecen:**

$$-\frac{58}{45};\ \frac{51}{17};\ \frac{\pi}{3};\ \sqrt[4]{-3};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt[5]{2^3};\ 1,0\overset{\frown}{7}$$

$\mathbb{N}$: $\frac{51}{17}$ $\mathbb{Z}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$ $\mathbb{Q}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1,0\overset{\frown}{7}$ $\mathbb{R}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1,0\overset{\frown}{7}$; $\frac{\pi}{3}$; $\sqrt[5]{2^3}$

2 **Expresa en forma de intervalo.**

a) ***x*** **es mayor que –2 y menor o igual que 5.** **b)** $|x-4| < 5$

a) $x \in (-2, 5]$

b) $x \in (-1, 9)$

3 **Escribe como potencia y simplifica.**

$$(\sqrt[4]{a^3}\cdot a^{-1}):(a\sqrt{a})$$

$(\sqrt[4]{a^3}\cdot a^{-1}):(a\sqrt{a}) = (a^{3/4}\cdot a^{-1}):(a\cdot a^{1/2}) = (a^{3/4-1}):(a^{1+1/2}) = (a^{-1/4}):(a^{3/2}) = a^{-1/4-3/2} = a^{-7/4}$

4 **Calcula y simplifica:** $\sqrt{\frac{125}{27}} - \sqrt{\frac{3}{5}}$

$$\sqrt{\frac{125}{27}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{5^3}{3^3}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{5}} = \frac{25-9}{3\sqrt{15}} = \frac{16}{3\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{45}$$

5 **Racionaliza.**

a) $\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{2}{3-\sqrt{3}}$

a) $\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{(4+\sqrt{6})(\sqrt{3})}{(2\sqrt{3})(\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{18}}{2\cdot 3} = \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $\frac{2}{3-\sqrt{3}} = \frac{2(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{6+2\sqrt{3}}{9-3} = \frac{6+2\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$

6 **Simplifica:** $\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175}$

$\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175} = \sqrt{3^2\cdot 7} - 2\sqrt{2^2\cdot 7} + \sqrt{5^2\cdot 7} = 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 5\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

7 **Si** $A = 3{,}24\cdot 10^6$; $B = 5{,}1\cdot 10^{-5}$; $C = 3{,}8\cdot 10^{11}$ **y** $D = 6{,}2\cdot 10^{-6}$, **calcula** $\left(\frac{A}{B}+C\right)\cdot D$. **Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.**

$$\left(\frac{A}{B}+C\right)\cdot D = \left(\frac{3{,}24\cdot 10^6}{5{,}1\cdot 10^{-5}} + 3{,}8\cdot 10^{11}\right)\cdot 6{,}2\cdot 10^{-6} = \left(\frac{3{,}24}{5{,}1}10^{11} + 3{,}8\cdot 10^{11}\right)\cdot 6{,}2\cdot 10^{-6} =$$

$$= (0{,}63529 + 3{,}8)\cdot 10^{11}\cdot 6{,}2\cdot 10^{-6} = 4{,}4353\cdot 6{,}2\cdot 10^5 = 27{,}499\cdot 10^5 =$$

$$= 2{,}7499\cdot 10^6 = 2{,}75\cdot 10^6$$

E.A. $< 0{,}5\cdot 10^4$

E.R. $< \frac{0{,}5\cdot 10^4}{2{,}75\cdot 10^6} = 1{,}8182\cdot 10^{-3} = 0{,}00182 = 0{,}18\ \%$

8 **Aplica la definición de logaritmo y obtén x.**

a) $\log_3 x = -1$ **b)** $\log x = 2{,}5$ **c)** $\ln x = 2$

a) $\log_3 x = -1 \to x = 3^{-1} \to x = \frac{1}{3}$

b) $\log x = 2{,}5 \to x = 10^{2{,}5} \to x = 10^{5/2} = \sqrt{10^5} = 10^2\sqrt{10}$

c) $\ln x = 2 \to x = e^2$

9 **Calcula x en cada caso.**

a) $2{,}5^x = 0{,}0087$ **b)** $1{,}005^{3x} = 143$

a) $x \log 2{,}5 = \log 0{,}0087 \to x = \dfrac{\log 0{,}0087}{\log 2{,}5} = -5{,}18$

b) $1{,}005^{3x} = 143$

Tomamos logaritmos:

$\log 1{,}005^{3x} = \log 143 \to 3x \log 1{,}005 = \log 143 \to x = \dfrac{\log 143}{3 \log 1{,}005} \approx 331{,}68$

10 **Expresa como un solo logaritmo y di el valor de A:**

$\log 5 + 2 \log 3 - \log 4 = \log A$

$\log 5 + 2 \log 3 - \log 4 = \log 5 + \log 3^2 - \log 4 = \log\left(\dfrac{5 \cdot 9}{4}\right) \to A = \dfrac{45}{4}$

11 **Si $\log k = 0{,}8$, ¿cuál es el valor de $\log 10k^3 + \log \dfrac{\sqrt{k}}{100}$?**

$\log 10k^3 + \log \dfrac{\sqrt{k}}{100} = \log 10 + \log k^3 + \log \sqrt{k} - \log 100 = 1 + 3 \log k + \dfrac{1}{2} \log k - 2 = 1 + 3 \cdot 0{,}8 + \dfrac{1}{2} 0{,}8 - 2 = 1{,}8$

12 **El área total de un cubo es 12 cm². ¿Cuál es el área total del cilindro inscrito en el cubo? Da el valor exacto.**

El área total del cubo es $6a^2 = 12 \to a = \sqrt{2}$.

El radio del cilindro inscrito es $r = \dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

El área de una base del cilindro es $\pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$.

El área lateral del cilindro es $2\pi \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi$.

El área total del cilindro es $2 \cdot \dfrac{\pi}{4} + \sqrt{2}\pi = \left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)\pi$ cm².