

Otras ecuaciones

5 ■■■ Resuelve.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

c) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

d) $x^4 - x^2 - 6 = 0$

a) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x_3 = 1; x_4 = -1$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1$$

b) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$4y^2 - 17y + 4 = 0 \rightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8} = \begin{cases} 4 \\ 1/4 \end{cases}$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x_3 = \frac{1}{2}; x_4 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -\frac{1}{2}$$

c) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} y = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ y = -1 \rightarrow \text{No vale} \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 2; x_2 = -2$$

d) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$y^2 - y - 6 = 0 \rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} y = 3 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ y = -2 \rightarrow \text{No vale.} \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$$

6 ■■■ Resuelve.

a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

b) $x^4 - 16 = 0$

c) $x^4 - 25x^2 = 0$

d) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

e) $(x^2 + 1)^2 + 6 = 5(x^2 + 1)$

f) $(2x^2 + 1)^2 - 5 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$

a) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} y = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ y = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = 1, x_4 = -1$$

$$b) x^4 = 16 \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{16}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 2, x_2 = -2$$

$$c) x^2(x^2 - 25) = 0$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = -5$$

$$d) \text{ Cambio de variable: } x^2 = y$$

$$y^2 - 18y + 81 = 0 \rightarrow y = \frac{18 \pm \sqrt{0}}{2} = 9 \rightarrow x^2 = 9$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 3, x_2 = -3$$

$$e) x^4 + 2x^2 + 1 + 6 = 5x^2 + 5$$

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0. \text{ Cambio de variable: } x^2 = y$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} y = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ y = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = 1, x_4 = -1$$

$$f) 4x^4 + 4x^2 + 1 - 5 = x^4 - 4$$

$$3x^4 + 4x^2 = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4) = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$3x^2 + 4 = 0 \text{ no tiene solución.}$$

La solución de la ecuación es $x = 0$.

7 ■■■ Resuelve.

$$a) \frac{x+2}{x} + 3x = \frac{5x+6}{2}$$

$$b) \frac{x-4}{x} - \frac{x-1}{4x} = -3x$$

$$c) \frac{x-3}{x} + \frac{x+3}{x^2} = \frac{2}{3}$$

$$d) x - \frac{x-1}{x+1} = \frac{3x-1}{2}$$

$$a) 2(x+2) + 2x \cdot 3x = x(5x+6)$$

$$2x+4+6x^2 = 5x^2+6x \rightarrow x^2-4x+4=0 \rightarrow (x-2)^2=0 \rightarrow x=2$$

Comprobamos sobre la ecuación inicial la validez de la solución.

Solución: $x = 2$.

$$b) 4(x-4) - (x-1) = -3x \cdot 4x$$

$$4x-16-x+1 = -12x^2 \rightarrow 12x^2+3x-15=0 \rightarrow 4x^2+x-5=0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{-1 \pm 9}{8} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -10/8 = -5/4 \end{cases}$$

Se comprueba sobre la ecuación inicial que las dos soluciones son válidas.

$$\text{Soluciones: } x_1 = 1, x_2 = -\frac{5}{4}$$

$$c) 3x(x-3) + 3(x+3) = 2x^2$$

$$3x^2 - 9x + 3x + 9 - 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

Se comprueba que la solución es válida.

Solución: $x = 3$

$$d) 2x(x+1) - 2(x-1) = (3x-1)(x+1)$$

$$2x^2 + 2x - 2x + 2 = 3x^2 + 2x - 1 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Se comprueba que las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$

8 ■■■ Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{x+1}{x-1} - 3 = \frac{2-x}{x}$$

$$b) \frac{3x+1}{4x+3} - \frac{1}{x} = 3$$

$$c) \frac{3x+4}{x+3} - \frac{1}{2} = \frac{x+19}{4x+6}$$

$$d) \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x} = \frac{2-5x}{x^2+3x}$$

$$a) (x+1)x - 3x(x-1) = (2-x)(x-1)$$

$$x^2 + x - 3x^2 + 3x = -x^2 + 3x - 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Se comprueba la validez de las dos soluciones.

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

$$b) x(3x+1) - (4x+3) = 3x(4x+3)$$

$$3x^2 + x - 4x - 3 = 12x^2 + 9x \rightarrow 9x^2 + 12x + 3 = 0 \rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} -1 \\ -1/3 \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$

$$c) 2(3x+4) - (x+3) = x+19$$

$$6x + 8 - 3 = x + 19 \rightarrow 4x = 14 \rightarrow x = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Solución: $x = \frac{7}{2}$

$$d) x - 2(x+3) = 2 - 5x$$

$$x - 2x - 6 = 2 - 5x \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2$$

Solución: $x = 2$

9 ■■■ Resuelve.

a) $x + \sqrt{25 - x^2} = 2x + 1$

b) $3x + \sqrt{6x + 10} = 35$

c) $x + 1 - \sqrt{5x + 1} = 0$

d) $\sqrt{4x^2 + 7x - 2} = x + 2$

a) $\sqrt{25 - x^2} = x + 1 \rightarrow 25 - x^2 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0$

$$x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 3 \rightarrow \sqrt{25 - 9} = 3 + 1 \rightarrow x = 3 \text{ es solución.}$

$x = -4 \rightarrow \sqrt{25 - 16} \neq -4 + 1 \rightarrow x = -4 \text{ no vale.}$

Solución: $x = 3$

b) $\sqrt{6x + 10} = 35 - 3x \rightarrow 6x + 10 = 1225 + 9x^2 - 210x$

$9x^2 - 216x + 1215 = 0 \rightarrow x^2 - 24x + 135 = 0$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{24 \pm 6}{2} = \begin{cases} 15 \\ 9 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 15 \rightarrow \sqrt{6 \cdot 15 + 10} \neq 35 - 45 \text{ no vale.}$

$x = 9 \rightarrow \sqrt{54 + 10} = 37 - 27 \rightarrow \text{Válida.}$

Solución: $x = 9$

c) $\sqrt{5x + 1} = x + 1 \rightarrow 5x + 1 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 0 \rightarrow \sqrt{1} = 1 \rightarrow \text{Válida.}$

$x = 3 \rightarrow \sqrt{15 + 1} = 3 + 1 \rightarrow \text{Válida.}$

Soluciones: $x_1 = 0, x_2 = 3$

d) $(\sqrt{4x^2 + 7x - 2})^2 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow 4x^2 + 7x - 2 - x^2 - 4x - 4 = 0$

$$3x^2 + 3x - 6 = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 18}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 1 \rightarrow \sqrt{4 + 7 - 2} = 1 + 2 \rightarrow x = 1 \text{ es solución.}$

$x = -2 \rightarrow \sqrt{16 - 14 - 2} = -2 + 2 \rightarrow x = -2 \text{ es solución.}$

Soluciones: $x_1 = 1, x_2 = -2$

10 ■■■ Dos de las siguientes ecuaciones no tienen solución. Averigua cuáles son y resuelve las otras.

a) $x - 17 = \sqrt{169 - x^2}$

b) $\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{3 - x} = 0$

c) $\sqrt{5x - 7} - \sqrt{1 - x} = 0$

d) $2\sqrt{5 - 4x} + 4x = 5$

a) $x^2 - 34x + 289 = 169 - x^2$

$$2x^2 - 34x + 120 = 0 \rightarrow x^2 - 17x + 60 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = 12 \rightarrow 12 - 17 = \sqrt{169 - 289} \rightarrow \text{No vale.}$$

$$x = 5 \rightarrow 5 - 17 = \sqrt{169 - 25} \rightarrow \text{No vale.}$$

No tiene solución.

b) $\sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{3 - x} \rightarrow x^2 + 3 = 3 - x \rightarrow x^2 + x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Comprobación:

$$x = 0 \rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3} \rightarrow \text{Es solución.}$$

$$x = -1 \rightarrow \sqrt{4} = \sqrt{4} \rightarrow \text{Es solución.}$$

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$

c) $\sqrt{5x - 7} = \sqrt{1 - x} \rightarrow 5x - 7 = 1 - x \rightarrow 6x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Comprobación:

$$\sqrt{5 \cdot \frac{4}{3} - 7} \neq \sqrt{1 - \frac{4}{3}} \rightarrow \text{No vale.}$$

La ecuación no tiene solución.

d) $4(5 - 4x) = (5 - 4x)^2 \rightarrow 20 - 16x = 25 + 16x^2 - 40x$

$$16x^2 - 24x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{24 \pm \sqrt{256}}{32} = \frac{24 \pm 16}{32} = \begin{cases} 5/4 \\ 1/4 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = \frac{5}{4} \rightarrow 2\sqrt{5 - 4 \cdot \frac{5}{4}} + 4 \cdot \frac{5}{4} = 5 \rightarrow x = \frac{5}{4} \text{ es solución.}$$

$$x = \frac{1}{4} \rightarrow 2\sqrt{5 - 4 \cdot \frac{1}{4}} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 5 \rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ es solución.}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$

11 ■■■ Di cuáles son las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $(x-2)(2x-3) = 0$

b) $x(x-3)(x+1) = 0$

c) $(x+5)(x^2-4) = 0$

d) $x(x^2+4) = 0$

e) $(x-2)(x^2-2x-3) = 0$

f) $x(x^2+3x+2) = 0$

a) $x-2=0 \rightarrow x_1=2; 2x-3=0 \rightarrow x_2=\frac{3}{2}$

Soluciones: $x_1=2, x_2=\frac{3}{2}$

b) Soluciones: $x_1=0; x_2=3; x_3=-1$

c) $x_1=-5; x^2=4 \rightarrow x_2=2; x_3=-2$

Soluciones: $x_1=-5; x_2=2; x_3=-2$

d) $x=0; x^2+4 \neq 0$

Solución: $x=0$

e) $x_1=2; x^2-2x-3=0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x_2=3 \\ x_3=-1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=2; x_2=3; x_3=-1$

f) $x_1=0; x^2+3x+2=0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} x_2=-2 \\ x_3=-1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0; x_2=-2; x_3=-1$

12 ■■■ Descompón en factores y resuelve.

a) $x^3-4x=0$

b) $x^3+x^2-6x=0$

c) $x^3+2x^2-x-2=0$

d) $x^3-x^2-5x-3=0$

a) $x(x^2-4)=0$

Soluciones: $x_1=0; x_2=2; x_3=-2$

b) $x(x^2+x-6)=0 \rightarrow x_1=0; x^2+x-6=0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0; x_2=-3; x_3=2$

c) $\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array} \quad x^2+3x+2=0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=1; x_2=-1; x_3=-2$

d) $\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array} \quad x^2-2x-3=0 \rightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-1$ (doble); $x_2=3$