

Proyecto MaTeX

Resolución de Sistemas Lineales

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)



MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS

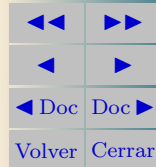


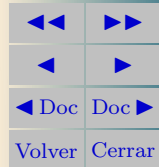
Tabla de Contenido

1. Introducción
2. Resolución de un sistema
 - 2.1. Método de la inversa.
 - 2.2. Regla de Cramer
3. Teorema de Rouche-Frobenius
Soluciones a los Ejercicios
Soluciones a los Tests



MaT_EX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



1. Introducción

En el capítulo **Sistemas** se vio el método de Gauss para resolver un sistema lineal. Si bien el método de Gauss o eliminación gaussiana nos permite discutir y resolver por reducción, es deseable obtener una expresión algebraica que nos permita expresar las soluciones de un sistema que tenga solución (compatible) en función de los coeficientes y los términos independientes.

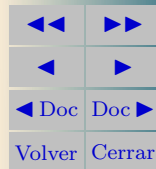
El determinante nos ofrece una expresión de la inversa de una matriz cuadrada y de aquí obtendremos la regla de Cramer.

Finalizamos con el teorema de Rouché-Frobeniüs que nos proporciona un resultado genérico de cuando un sistema tiene solución y en este caso, cuando es única o tiene infinitas.



MaTEX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS





2. Resolución de un sistema

2.1. Método de la inversa.

La matriz inversa es útil como notación para expresar la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Sea por ejemplo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned} \right\}$$

Expresado en forma matricial queda:

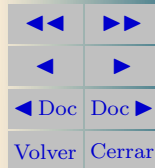
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \equiv A \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$$

Si A es regular y tiene inversa A^{-1} , multiplicando la ecuación anterior por la izquierda, se tiene que, $A^{-1} \cdot A \cdot \tilde{x} = A^{-1} \cdot \tilde{b}$ y

$$\boxed{\tilde{x} = A^{-1} \cdot \tilde{b}} \quad (1)$$

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS





Ejemplo 2.1. Resolver el sistema calculando la inversa

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x & - & 2y & - & z & = & -4 \\ -4x & + & y & - & z & = & -5 \\ 2x & & & + & z & = & 5 \end{array} \right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \equiv A \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$$

Como $\text{Det}(A) = 1 \neq 0$, existe la inversa de A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

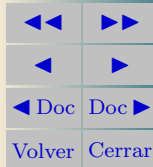
luego

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

□

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS





2.2. Regla de Cramer

Si sustituimos en la ecuación (1), A^{-1} por su expresión mediante la matriz adjunta se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

y para todo i ,

$$x_i = \frac{b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni}}{|A|}$$

que se puede expresar como el determinante de la matriz A cambiando la columna i -ésima por los términos independientes, es decir

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & b_i & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad 1 \leq i \leq n \quad (2)$$

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS





Ejemplo 2.2. Resolver por la regla de Cramer el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{array} \right\}$$

Solución: La regla de Cramer nos da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1$$

□

Ejemplo 2.3. Resolver por la regla de Cramer el sistema

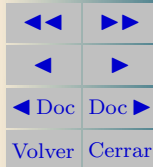
$$\left. \begin{array}{l} 3x - y + z = 7 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{array} \right\}$$

Solución: En primer lugar comprobamos que hay inversa

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{5}{2} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{7}{2}$$

MaTEX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{2} = -4$$

□

Ejercicio 1. Aplica la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\left. \begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Ejercicio 2. Aplica la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\left. \begin{aligned} ax + y &= 1 \\ x + y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Ejercicio 3. ¿Se puede resolver el sistema

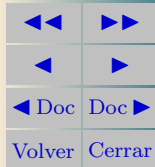
$$\left. \begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 3x + 2y - 8z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

aplicando la regla de Cramer?



MaTEX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS





3. Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema 3.1. Sea el sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{11} x_1 & +a_{12} x_2 & +a_{13} x_3 & \cdots & +a_{1n} x_n & = & b_1 \\
 a_{21} x_1 & +a_{22} x_2 & +a_{23} x_3 & \cdots & +a_{2n} x_n & = & b_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & = & \dots \\
 a_{m1} x_1 & +a_{m2} x_2 & +a_{m3} x_3 & \cdots & +a_{mn} x_n & = & b_m
 \end{array} \tag{3}$$

se demuestra que el sistema tiene solución cuando el rango de la matriz A de los coeficientes es el mismo que el rango de la matriz ampliada AM con los términos independientes.

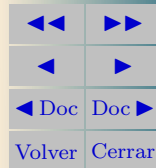
Un sistema es compatible $\iff r(A) = r(AM)$

$$\begin{array}{l}
 \text{COMPATIBLE} \\
 r(A) = r(AM)
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \text{DETERMINADO} \\
 r(A) = r(AM) = n \\
 \\
 \text{INDETERMINADO} \\
 r(A) = r(AM) = r < n
 \end{array}
 \right.$$

INCOMPATIBLE
 $r(A) < r(AM)$

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
 SISTEMAS





Test. Todo sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas tiene solución

- (a) Verdadero (b) Falso

Test. Es posible encontrar un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única.

- (a) Verdadero (b) Falso

Test. Es posible encontrar un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga solución única.

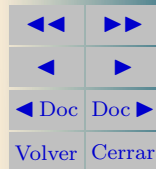
- (a) Verdadero (b) Falso

Ejercicio 4. Analiza las siguientes cuestiones:

- Poner un ejemplo de sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea incompatible.
- Poner un ejemplo de sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que tenga infinitas soluciones.
- El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es 1. ¿Qué rango puede tener como máximo la matriz ampliada?.
- Si el rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es 2, ¿puede ser compatible el sistema? ¿Puede ser compatible y determinado? ¿Puede ser incompatible? Razonar con ejemplos concretos.

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Ejercicio 5. Un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿puede ser compatible y determinado? En caso afirmativo, dar un ejemplo.

Ejercicio 6. Discutir el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 2 \\ 5x - y + az &= 6 \end{aligned} \right\}$$

Ejercicio 7. Discutir el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} a^2x + a^3y + az &= 1 \\ x + a^2y + z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Ejercicio 8. Discutir y resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - z &= a - 4 \\ (a - 6)y + 3z &= 0 \\ (a + 1)x + 2y &= 3 \end{aligned} \right\}$$

Ejercicio 9. Discutir en función de a el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} a^2x + 3y + 2z &= 0 \\ ax - y + z &= 0 \\ 8x + y + 4z &= 0 \end{aligned} \right\}$$



MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS





Ejercicio 10. Discutir y resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x - y &= a \\ x + a^2 z &= 2a + 1 \\ x - y + (a^2 - a)z &= 2a \end{aligned} \right\}$$

Ejercicio 11. Discutir y resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} ax + y + bz &= 1 \\ x + ay + z &= 0 \\ x + y + bz &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Ejercicio 12. Discutir y resolver en función del parámetro k :

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y - z &= 2 \\ kx + y + 3z &= 4 \\ kx + y - 7z &= 3 \end{aligned} \right\}$$

Ejercicio 13. Discutir y resolver en función del parámetro k :

$$\left. \begin{aligned} kx + ky - z &= 2 \\ 3x - ky &= 0 \\ 5x + ky &= 0 \\ x + 2z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

MaTEX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Ejercicio 14. Discutir y resolver según los distintos valores de los parámetros a y b :

$$\left. \begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ a^2x + by &= 2 \end{aligned} \right\}$$

Ejercicio 15. Discutir y resolver según los distintos valores de los parámetros a y b :

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ y - z &= -1 \\ 2x - y + az &= b \end{aligned} \right\}$$

Ejercicio 16. Discutir y resolver según los distintos valores de los parámetros a y b :

$$\left. \begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ 2x + 3y - 2z &= -8 \\ 4x + y + az &= b \end{aligned} \right\}$$

Ejercicio 17. Discutir y resolver según los distintos valores de los parámetros a y b :

$$\left. \begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= a \\ 2x - 5y + bz &= -2 \end{aligned} \right\}$$

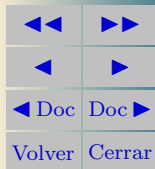
Ejercicio 18. Sea el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{aligned} x \cos a + y \operatorname{sen} a &= 1 \\ x \operatorname{sen} a - y \cos a &= 1 \end{aligned} \right.$$



MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



1. Resolverlo, determinando x e y en función de a .
2. Calcular a para que $x + y = 1$.

Ejercicio 19. Discutir y resolver según los distintos valores de los parámetros a y b :

$$\left. \begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= a \\ 2x - 5y + bz &= -2 \end{aligned} \right\}$$



MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2$$

Ejercicio 1

*MaTeX*RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Ejercicio 2. Primero determinamos a para que tenga inversa

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$$

Para $a \neq 1$ el sistema tiene la solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{a - 1} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{a - 1} = \frac{a - 1}{a - 1} = 1$$

MaTEX

Ejercicio 2

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Ejercicio 3. Pasamos la variable z como secundaria al término independiente

$$\left. \begin{array}{l} x - y = z \\ 3x + 2y = 8z \end{array} \right\}$$

y resolvemos por Cramer el sistema en x e y :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & -1 \\ 8z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10z}{5} = 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 3 & 8z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5z}{5} = z$$

Ejercicio 3



MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Prueba del Teorema 3.1. El sistema se puede escribir como una combinación lineal del vector columna b en función de los vectores columna de la matriz de coeficientes A , es decir

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (4)$$

Escribimos cada vector columna como \mathbf{c}_i , quedando la expresión anterior como

$$x_1 \cdot \mathbf{c}_1 + x_2 \cdot \mathbf{c}_2 + \cdots + x_n \cdot \mathbf{c}_n = \mathbf{b} \quad (5)$$

(\implies) Si el sistema tiene solución existe una n -tupla (s_1, s_2, \dots, s_n) que satisface el sistema, y por tanto la ecuación (4), luego el vector b será combinación lineal de los vectores columna de A , y por tanto

$$r(A) = r(AM)$$

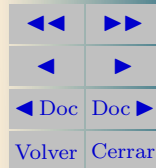
(\impliedby) Recíprocamente. Si $r(A) = r(AM)$, como $AM = (A | \mathbf{b})$ la columna \mathbf{b} que amplía la matriz A no afecta al rango de A , luego \mathbf{b} es combinación lineal de las columnas de A y existirán escalares (s_1, s_2, \dots, s_n) que satisfagan la ecuación (4) y por tanto el sistema. Con ello hemos demostrado que

$$\text{UN SISTEMA ES COMPATIBLE} \iff r(A) = r(AM)$$



MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS





Ejercicio 4.

- a) Lo más sencillo es dejar la parte lineal de los coeficientes igual y cambiar el término independiente. Por ejemplo

$$x + y - z = 0$$

$$x + y - z = 2$$

que implica el absurdo $0 = 2$.

- b) Cualquiera que sea compatible. Por ejemplo

$$x + y - z = 0$$

$$y - z = 1$$

- c) Claramente 1 ó 2.

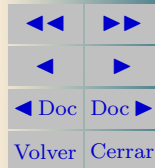
- d) Puede haber dos casos:

- Si el $r(AM) = 2 = rg(A) < 3$ el sistema no puede ser compatible determinado, será compatible indeterminado.
- Si el $rg(AM) = 3 > rg(A)$ sistema incompatible.

Ejercicio 4

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



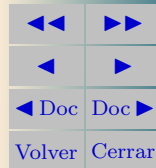
Ejercicio 5. Si, cuando $r(A) = r(AM) = n^o$ incógnitas. Veamos un ejemplo. Tomemos $x = 1$ e $y = 2$ y escribamos

$$x + y = 3 \quad x - y = -1 \quad 3x + y = 5$$

Ejercicio 5



MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Ejercicio 6.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & a \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & a \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5a + 36 = 0 \Rightarrow a = \frac{36}{5}$$

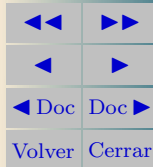
- Caso $a = \frac{36}{5}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{1 & 2 & 1}^A & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & \frac{36}{5} & 6 \end{pmatrix}}_{AM} \xrightarrow{\substack{f_2 - 2f_1 \\ f_3 - 5f_1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{1 & 2 & 1}^A & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -55 & 11 & -20 \end{pmatrix}}_{AM}$$

$$\xrightarrow{f_3 - 11f_2} \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{1 & 2 & 1}^A & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{AM} \Rightarrow \begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(AM) = 3 \end{matrix} \quad \mathbf{S.I.}$$

- Caso $a \neq \frac{36}{5}$, $r(A) = 3 = r(AM)$, **S.C.D.**

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Ejercicio 7.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a^2 & a^3 & a & 1 \\ 1 & a^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{AM}^A$$

Tomamos un menor de orden 2,

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^4 - a^3 = a^3(a-1) = 0 \quad \boxed{a=0} \vee \boxed{a=1}$$

- Caso $a = 0$.

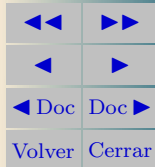
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{AM}^A \Rightarrow \begin{array}{l} r(A) = 1 \\ r(AM) = 2 \end{array} \quad \text{S.I.}$$

- Caso $a = 1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{AM}^A \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{AM}^A \Rightarrow \begin{array}{l} r(A) = 1 \\ r(AM) = 2 \end{array} \quad \text{S.I.}$$

- Caso $a \neq 0 \wedge 1$, $r(A) = 2 = r(AM)$, **S.C.D.**

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS

$$\blacksquare a = -3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{f_3+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{3f_3+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} r(A) = 2 \\ r(AM) = 3 \\ \text{S.I.} \end{array}$$

$$\blacksquare a \neq -3 \wedge a \neq 5 \quad |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = r(AM) = 3, \text{ S.C.D.}$$

Resolvemos este caso por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a-4 & 1 & -1 \\ 0 & a-6 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{(a-5)(a+3)} = \frac{-3}{a+3} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a-4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ a+1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{(a-5)(a+3)} = \frac{3(a+2)}{a+3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a-4 \\ 0 & a-6 & 0 \\ a+1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{(a-5)(a+3)} = \frac{-(a-6)(a+2)}{a+3}$$



MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS

Ejercicio 8



Ejercicio 9. Este sistema es homogéneo, siempre tiene solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & 3 & 2 \\ a & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5a^2 - 10a + 40$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \boxed{a=-4} \vee \boxed{a=2}$$

- Caso $a = -4 \vee 2$ $r(A) = r(AM) = 2$ **S.C.I.**
- Caso $a \neq -4 \wedge 2$ $r(A) = r(AM) = 3$ **S.C.D.** En este caso como es homogéneo la solución es la nula $(0, 0, 0)$.

Ejercicio 9



MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS





Ejercicio 10.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a^2 - a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 - a \end{vmatrix} = a^2 - a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \boxed{a=0} \vee \boxed{a=1}$$

- Caso $a = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = r(AM) = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

S.C.I.

- Caso $a = 1$.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2 \quad r(AM) = 3 \quad \text{S.I.}$$

- Caso $a \neq 0 \wedge 1 \quad r(A) = r(AM) = 3 \quad \text{S.C.D.}$

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS

Resolvemos por el método de Cramer en función de a

$$x = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2a+1 & 0 & a^2 \\ 2a & -1 & a^2-a \end{vmatrix} = \frac{a^2 - a - 1}{a - 1}$$

$$y = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2a+1 & a^2 \\ 1 & 2a & a^2-a \end{vmatrix} = \frac{-a}{a-1}$$

$$z = \frac{1}{a-1}$$

Ejercicio 10



MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS





Ejercicio 11.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = (a-1)(ab-1)$$

■ Caso $a \neq 1$ y $ab \neq 1$, $r(A) = r(AM) = 3$ **S.C.D.**

■ Caso $a \neq 1$ y $ab = 1$.

Como el menor $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \implies r(A) = 2$

y como $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - a \neq 0 \implies r(AM) = 3$, luego **S.I.**

■ Caso $a = 1$ y $b \neq 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1-b & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = r(AM) = 2$$

S.C.I.

■ Caso $a = 1$ y $b = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = 1 < r(AM) = 2$$

S.I.

Ejercicio 11

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Ejercicio 12. Veamos cuando se anula el determinante de AM ,

$$|AM| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 3 & 4 \\ k & 1 & -7 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ k-1 & 0 & 2 & 3 \\ k-1 & 0 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(2)}{=} - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ k-1 & 2 & 3 \\ k-1 & -8 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ k-4 & 2 & 3 \\ k-3 & -8 & 2 \end{vmatrix} = -3(-10k + 38)$$

1. Sacamos ceros con $f_2 + f_1$, $f_3 - f_1$ y $f_4 - f_1$.
2. Desarrollamos el determinante por la columna c_2 .
3. Sacamos ceros con $c_1 - c_3$ y desarrollamos.

El determinante de AM se anula en $k = \frac{19}{5}$.

$$\begin{cases} k = \frac{19}{5} & r(A) = r(AM) = 3, & \text{S.C.D.} \\ k \neq \frac{19}{5} & r(A) < r(AM) = 4, & \text{S.I.} \end{cases}$$

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS





MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS

Resolvemos el caso $k = \frac{19}{5}$ por el método de Gauss

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ \frac{19}{5} & 1 & 3 & 4 \\ \frac{19}{5} & 1 & -7 & 3 \end{array} \right) \stackrel{(1)}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 19 & 5 & 15 & 20 \\ 19 & 5 & -35 & 15 \end{array} \right) \\ & \stackrel{(2)}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -4 & 1 \\ 0 & -14 & -54 & -4 \end{array} \right) \stackrel{(3)}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -40 & -4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

1. Multiplicamos la tercera y cuarta ecuación por 5.
2. Sacamos ceros con $f_2 - 2f_1$, $f_3 - 19f_1$ y $f_4 - 19f_1$
3. Simplificamos la f_2 por 3 y $f_3 + 14f_2$ y $f_4 + 14f_2$.

Por sustitución hacia atrás obtenemos

$$z = \frac{1}{10} \quad y = -\frac{1}{10} \quad x = 1$$

Ejercicio 12



**Ejercicio 13.**

$$|AM| = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 1 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 1 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -24k$$

El determinante de AM se anula en $k = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{f_2-3f_1 \\ f_3-5f_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{2f_4-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} k = 0 & r(A) = 2 < r(AM) = 3, & \text{S.I.} \\ k \neq 0 & r(A) < r(AM) = 4, & \text{S.I.} \end{cases}$$

Ejercicio 13

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Ejercicio 14.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a^2 & b & 2 \end{pmatrix}}_{AM}^A$$

Siendo $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a^2 & b \end{vmatrix} = 2b - a^2$ y los menores de orden 2 de AM

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a^2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & 2 \end{vmatrix} = 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

Con estos valores la discusión es claramente:

$$\begin{cases} a^2 = 2b & \begin{cases} a = \pm 2 \wedge b = 2 & r(A) = r(AM) = 1, \text{ S.C.I.} \\ \text{en otro caso} & r(A) = 1 \neq r(AM) = 2, \text{ S.I.} \end{cases} \\ a^2 \neq 2b & r(A) = r(AM) = 2, \text{ S.C.D.} \end{cases}$$

Ejercicio 14

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS

Ejercicio 15. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & a-1 \end{vmatrix} = 2(a-3)$. Analizamos $a = 3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & b \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b-5 \end{array} \right)$$

Discusión:

$$\begin{cases} a = 3 & \begin{cases} b = 5 & r(A) = r(AM) = 2, \text{ S.C.I.} (*) \\ b \neq 5 & r(A) = 2 \neq r(AM) = 3, \text{ S.I.} \\ a \neq 3 & r(A) = r(AM) = 3, \text{ S.C.D.} (**) \end{cases} \end{cases}$$

(*) Expresamos la solución en paramétricas

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

(**) Por Cramer

$$x = \frac{2a - b - 1}{a - 3} \quad y = \frac{b - a - 2}{a - 3} \quad z = \frac{b - 5}{a - 3}$$



MaTEX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Ejercicio 15



Ejercicio 16. Aplicamos reducción o Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & a & b \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -12 \\ 0 & 5 & a-4 & b-8 \end{array} \right) \equiv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & a & b-4 \end{array} \right)$$

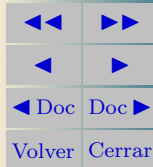
Discusión del sistema:

$$\begin{cases} a = 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \begin{cases} b = 4 & r(A) = r(AM) = 2, \text{ S.C.I.} \\ b \neq 4 & r(A) = 2 \neq r(AM) = 3, \text{ S.I.} \\ r(A) = r(AM) = 3, & \text{ S.C.D.} \end{cases}$$

Ejercicio 16

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS





Ejercicio 17. Aplicamos reducción o Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & | & a \\ 3 & -1 & 2 & | & 1 \\ 2 & -5 & b & | & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & | & a \\ 0 & -13 & -1 & | & 1 - 3a \\ 0 & -13 & b - 2 & | & -2 - 2a \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & | & a \\ 0 & -13 & -1 & | & 1 - 3a \\ 0 & 0 & b - 1 & | & a - 3 \end{pmatrix}$$

Discusión del sistema:

$$\begin{cases} b = 1 \\ b \neq 1 \end{cases} \begin{cases} a = 3 & r(A) = r(AM) = 2, \text{ S.C.I.} \\ a \neq 3 & r(A) = 2 \neq r(AM) = 3, \text{ S.I.} \\ r(A) = r(AM) = 3, & \text{ S.C.D.} \end{cases}$$

Ejercicio 17

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



**Ejercicio 18.**

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & -\cos a \end{vmatrix} = -\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = -1 \neq 0$$

Luego $\forall a$ el sistema es C.D. Resolvemos por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen} a \\ 1 & -\cos a \end{vmatrix}}{-1} = \cos a + \operatorname{sen} a$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \cos a & 1 \\ \operatorname{sen} a & 1 \end{vmatrix}}{-1} = -\cos a + \operatorname{sen} a$$

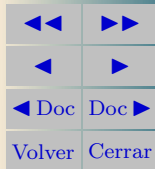
Para que se cumpla $x + y = 1$, resolvemos $2 \operatorname{sen} a = 1$,

$$\operatorname{sen} a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS

Ejercicio 18





Ejercicio 19. Aplicamos reducción o Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & | & a \\ 3 & -1 & 2 & | & 1 \\ 2 & -5 & b & | & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & | & a \\ 0 & -13 & -1 & | & 1 - 3a \\ 0 & -13 & b - 2 & | & -2 - 2a \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & | & a \\ 0 & -13 & -1 & | & 1 - 3a \\ 0 & 0 & b - 1 & | & a - 3 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Discusión del sistema:

$$\begin{cases} b = 1 & \begin{cases} a = 3 & r(A) = r(AM) = 2, \text{ S. C. I.} \\ a \neq 3 & r(A) = 2 \neq r(AM) = 3, \text{ S. I.} \end{cases} \\ b \neq 1 & r(A) = r(AM) = 3, \quad \text{S. C. D.} \end{cases}$$

Resolvemos para los casos de compatibilidad.

- Caso $b = 1$ y $a = 3$. Sustituyendo en (*), tomando $z = \mu$ como variable libre, de la segunda ecuación se tiene

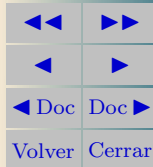
$$y = -\frac{8}{13} + \frac{1}{13}\mu$$

y sustituyendo en la primera ecuación

$$x = \frac{71}{13} - \frac{17}{13}\mu$$

MaTEX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



- Caso $b \neq 1$ y cualquier a . Despejando z en (*), obtenemos $z = \frac{a-3}{b-1}$.
Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos y ,

$$y = \frac{b(1-3a) - 4 + 4a}{b-1}$$

y finalmente de la primera ecuación

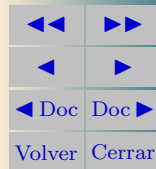
$$x = \frac{23 - 10a + ab}{b-1}$$

Ejercicio 19



MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Soluciones a los Tests

Solución al Test: Falso pues el sistema puede ser incompatible. Por ejemplo:

$$x + y + z + t = 1$$

$$x + y + z + t = 2$$

Final del Test



MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Solución al Test: Es imposible, pues para que tenga solución única se tiene que cumplir:

$$r(A) = r(AM) = 3$$

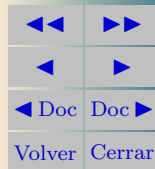
y en nuestro caso, con dos ecuaciones $r(A) \leq 2$

Final del Test



MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Solución al Test: Es posible, basta que una de ellas sea dependiente de las otras. Por ejemplo: partimos de la solución $x = 1$ e $y = 1$, que satisfacen el sistema

$$\begin{aligned}x + y &= 2 \\x - y &= 0\end{aligned}$$

ahora añadimos otra ecuación dependiente de ellas

$$2x + 2y = 4$$

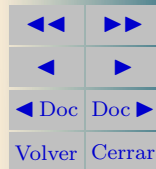
y ya tenemos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga solución única.

Final del Test



MaTeX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS



Índice alfabético

regla de Cramer, 6

teorema de Rouche-Frobenius , 9



MaTEX

RESOLUCIÓN DE
SISTEMAS

