

# Proyecto MaTeX

## Determinantes

Fco Javier González Ortiz

### Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

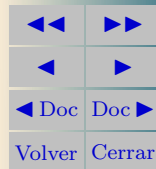
© 2004 [javier.gonzalez@unican.es](mailto:javier.gonzalez@unican.es)  
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

DETERMINANTES



# Tabla de Contenido

1. Introducción
2. Determinantes
  - 2.1. Propiedades
  - 2.2. Cálculo de determinantes con las propiedades
3. Determinantes de orden superior
  - 3.1. Adjunto de un elemento
  - 3.2. Desarrollo de un determinante por adjuntos
4. Aplicaciones de los determinantes
  - 4.1. Inversa de una matriz
    - Inversa de una matriz  $2 \times 2$
    - Inversa de una matriz  $3 \times 3$
  - 4.2. Cálculo del rango de una matriz
    - Menores de una matriz
    - Método práctico

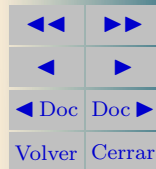
Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests



MaTEX

DETERMINANTES





## 1. Introducción

Los determinantes históricamente son previos a las matrices. Si bien su importancia en un principio fué mayor en la actualidad el concepto de matriz ha resultado más fértil.

En el capítulo de sistemas hemos aprendido a resolver sistemas por el método de Gauss. La idea de expresar las soluciones en función de los coeficientes y los términos independientes llevó a Leibnitz en el siglo XVII, a la teoría de los determinantes.

El uso de determinantes nos permitirá

- Calcular la inversa de una matriz
- Expresar la solución de un sistema de ecuaciones y
- Determinar el rango de una matriz.

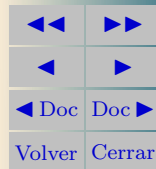
## 2. Determinantes

**Definición 2.1** Sea  $A$  una matriz de orden 2, llamamos determinante de la matriz  $A$  y lo representamos como  $|A|$ , al número

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (1)$$

MaTeX

DETERMINANTES





## 2.1. Propiedades

**D1** El determinante es una función lineal de cualquiera de sus filas o columnas. Como las operaciones lineales con vectores son la suma y producto por un escalar, en realidad esta propiedad expresa dos reglas:

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} \quad (D1a)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad (D1b)$$

**D2** El determinante cambia de signo cuando se intercambian dos líneas consecutivas,

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad (D2)$$

**D3** El determinante de la matriz identidad es 1,

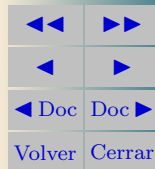
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (D3)$$

**D4** Si dos líneas paralelas de  $A$  son iguales, el determinante es nulo,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ba = 0 \quad (D4)$$

MaTeX

DETERMINANTES





**D5** Si sumamos a una línea de  $A$  un múltiplo de otra línea paralela, el determinante no varía,

$$\begin{vmatrix} a + kc & b + kd \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad (D5)$$

**D6** Si  $A$  tiene una línea nula, el determinante es nulo,

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (D6)$$

**D7** Si  $A$  es una matriz triangular, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad \quad (D7)$$

**D8** El determinante de  $A$  y de  $A^T$  son iguales,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \quad (D8)$$

**D9** Si una línea es múltiplo de otra línea paralela, el determinante es nulo,

$$\begin{vmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} = 0 \quad (D9)$$

# MaTeX

DETERMINANTES



**Test.** Hallar  $\star$  para que se cumpla  $\begin{vmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \star \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

- (a) 1                      (b) 3                      (c) 2                      (d) 4

**Ejercicio 1.** Expresa como sumas los determinantes

a)  $\begin{vmatrix} a+1 & 4 \\ a+2 & 7 \end{vmatrix}$                       b)  $\begin{vmatrix} a-1 & 2a+4 \\ 1+a & a \end{vmatrix}$

**Inicio del Test** A partir de  $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3$ , hallar :

1. El valor de  $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} = \dots$  es,

6                                      -6                                      0                                      2

2. El valor de  $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = \dots$  es,

-4                                      4                                      0                                      5

3. El valor de  $\begin{vmatrix} m+p & n+q \\ p & q \end{vmatrix} = \dots$  es,

1                                      6                                      0                                      3

**Final del Test**



MaTeX

DETERMINANTES



Inicio del Test A partir de  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$ , hallar :

1. El valor de  $\begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix} = \dots$  es,  
0    4    2    8
2. El valor de  $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \dots$  es,  
0    4    -4    -1
3. El valor de  $\begin{vmatrix} a + 3b & c + 3d \\ b & d \end{vmatrix} = \dots$  es,  
0    4    7    12
4. El valor de  $\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = \dots$  es,  
-4    4    0    1
5. El valor de  $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ -c & -d \end{vmatrix} = \dots$  es,  
3    4    0    -12

Final del Test



MaTeX

DETERMINANTES



**Ejemplo 2.1.** Sean las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ , comprueba que

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$

*Solución:* En efecto,  $|A| = 1$  y  $|B| = 2$ , sin embargo

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \implies |A + B| = 9 \neq |A| + |B| = 3$$

□

**Ejemplo 2.2.** Sean las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ , comprueba que se verifica

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

*Solución:* En efecto,  $|A| = 1$  y  $|B| = 2$ , y se verifica que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \implies |A \cdot B| = 2 = |A| \cdot |B| = 2$$

□

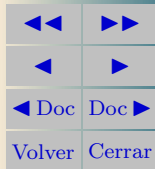
**Teorema 2.1. Regla de Laplace** Si  $A$  y  $B$  son dos matrices cuadradas se cumple

Regla de Laplace  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$



# MaTeX

## DETERMINANTES







## 2.2. Cálculo de determinantes con las propiedades

Las propiedades expuestas para determinantes de orden 2 son válidas para determinantes de orden superior. En las siguientes cuestiones y ejercicios se aplican a determinantes de orden 3.

La idea consiste en aplicar las propiedades y transformar el determinante hasta conseguir uno de forma triangular para aplicar la propiedad D7.

**Ejemplo 2.3.** Demostrar que: 
$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$$

*Solución:* Usando las propiedades:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & b+c+a & c+a \\ 1 & c+a+b & a+b \end{vmatrix} = \quad (D5)$$

$$\stackrel{(2)}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix} = \quad (D1)$$

$$= 0 \quad (D4)$$

- (1) Sumamos a la  $c_2$  la columna  $c_3$ .  
 (2) Factor común  $a+b+c$  en la  $c_2$ .

□

MaTeX

DETERMINANTES





**Ejemplo 2.4.** Calcular con las propiedades:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \text{Solución: } & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 9 & 7 \end{vmatrix} = \\ & \stackrel{(3)}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -30 \end{aligned}$$

- (1) Cambiamos  $c_2$  con  $c_1$ .      (2) Reducimos con  $f_2 + f_1$  y  $f_3 + 3f_1$ .  
 (3) Factor común 2 en la  $f_2$ .      (4) Reducimos con  $f_3 - 3f_2$

□

**Ejercicio 2.** Indicar qué propiedad hemos aplicado en las igualdades:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

**EJERCICIO 3.** Calcular los determinantes con las propiedades.

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

MaTeX

DETERMINANTES





### 3. Determinantes de orden superior

#### 3.1. Adjunto de un elemento

Dada una matriz  $A = (a_{ij})$  de orden  $n \times n$  se llama **adjunto** del elemento  $a_{ij}$ , y se denota  $A_{ij}$  al determinante de orden  $n - 1$  que resulta de eliminar su fila y su columna afectado del signo  $+$  o  $-$  según  $i + j$  sea par o impar,

Adjunto de  $a_{ij} = A_{ij}$

Por ejemplo en la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

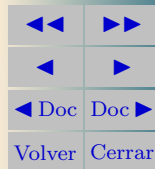
$$A_{22} = 0 \quad A_{23} = -9 \quad A_{31} = -4$$

siendo la **matriz adjunta**  $Adj(A)$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -20 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -9 \\ -4 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

MaTeX

DETERMINANTES



### 3.2. Desarrollo de un determinante por adjuntos

Dada una matriz  $A = (a_{ij})$  de orden  $n \times n$  el determinante de  $A$ , es la suma de los productos de los elementos de una línea por sus respectivos adjuntos,

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} \quad (\text{fila } i) \quad (2)$$

Sea por ejemplo el determinante de una matriz de orden  $3 \times 3$   
Desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -36$$

Desarrollamos por la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -36$$

Desarrollando en primer lugar por la primera fila y en segundo lugar por la tercera columna. Y así para cualquier otra línea.



MaTeX

DETERMINANTES





**Ejemplo 3.1.** Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

*Solución:*

Lo habitual es hacer ceros en alguna línea y después desarrollar por adjuntos.

En este caso hemos elegido hacer ceros en la fila 3ª.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} &\stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 1 \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -8 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &\stackrel{(3)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -6 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} -1 \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \end{aligned}$$

- (1) Reducimos con  $c_2 - 3c_1$ ,  $c_3 - c_1$  y  $c_4 - 2c_1$ .
- (2) Desarrollamos con adjuntos por la  $f_3$ .
- (3) Reducimos con  $c_1 - 2c_3$ .
- (4) Desarrollamos por la  $f_1$

□

# MaTeX

DETERMINANTES





**Ejemplo 3.2.** Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

*Solución:*

Vamos a hacer ceros en la primera columna usando como pivote el elemento  $a_{11} = 1$ , obteniendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 1 \begin{vmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -7 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \\ \stackrel{(3)}{=} \begin{vmatrix} 11 & 4 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ -19 & 6 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} -1 \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ -19 & 6 \end{vmatrix} = -142$$

- (1) Efectuamos  $f_2 - 2f_1$ ,  $f_3 - 3f_1$  y  $f_4 + f_1$ .
- (2) Desarrollamos por la  $c_1$ .
- (3) Efectuamos  $f_1 - 2f_2$  y  $f_3 + 3f_2$ .
- (4) Desarrollamos por la columna tercera.

□

MaTeX

DETERMINANTES





**Ejercicio 4.** Calcular los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

**EJERCICIO 5.** Calcular los siguientes determinantes:

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

**EJERCICIO 6.** Calcular los siguientes determinantes:

$$(a) \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

**EJERCICIO 7.** Calcular los siguientes determinantes:

$$(a) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 21 & 23 & 25 & 27 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix}$$

MaTeX

DETERMINANTES





## 4. Aplicaciones de los determinantes

**Teorema 4.1.** Dada una matriz  $A = (a_{ij})$  de orden  $n \times n$  se cumple que la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de otra línea paralela es 0,

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{jn} = 0 \quad i \neq j \quad (3)$$

### 4.1. Inversa de una matriz

La construcción de la inversa de una matriz  $A$  se efectúa por los adjuntos. De las ECUACIONES 2 y 3 se sigue

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}^A \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}}^{Adj(A)^T} = \overbrace{\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}}^{|A| \mathbf{I}_d}$$

Siendo  $Adj(A)$  la matriz adjunta de  $A$ . Como  $A \cdot Adj(A)^T = |A| \cdot \mathbf{I}_d$ , dividiendo por  $|A|$

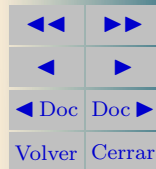
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^T \quad (4)$$

De la EXPRESIÓN 4 se sigue que hay inversa cuando  $|A|$  no es cero.

$$\exists A^{-1} \iff |A| \neq 0 \quad (5)$$

MaTEX

DETERMINANTES







- Inversa de una matriz  $2 \times 2$

**Ejemplo 4.1.** Hallar la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

*Solución:*

$$a) |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-4)(-2) = -5 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$$

b) Se calculan los adjuntos de los elementos de  $A$

$$A_{11} = 1 \quad A_{12} = -(-4) = 4 \quad A_{21} = -(-2) = 2 \quad A_{22} = 3$$

Matriz adjunta es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \implies Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

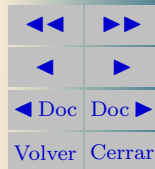
La inversa de  $A$  es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

□

MaTeX

DETERMINANTES





• Inversa de una matriz  $3 \times 3$

**Ejemplo 4.2.** Hallar la inversa de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*Solución:*

a) Se calcula  $|A| = 1 \neq 0 \implies \exists A^{-1}$

b) Calculamos los adjuntos:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \implies \text{Adj}(A)^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

□

MaTeX

DETERMINANTES





**Ejercicio 8.** Calcula las matrices inversas de:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 9.** Con las matrices  $A$  y  $B$  del ejercicio anterior resuelve las ecuaciones matriciales:

$$a) AX = B$$

$$b) XA = B$$

$$c) AXB = I$$

$$d) BXA = I$$

**Ejercicio 10.** Responder a las siguientes cuestiones

a) ¿Es cierto que toda matriz cuadrada admite inversa?

b) Si  $|A| = 3$ , ¿es cierto que  $|A^{-1}| = \frac{1}{3}$ ?

c) Sabiendo que  $|A| = -\frac{1}{2}$  y  $|B| = -\frac{2}{3}$ , siendo  $A$  y  $B$  del mismo orden, hallar  $|A^{-1}B^{-1}|$ .

**EJERCICIO 11.** Sea  $A_n$  una matriz cuadrada de orden  $n$ :

(a) Demostrar que  $|\lambda A_n| = \lambda^n |A_n|$

(b) Expresar  $|Adj(A_n)|$  en función de  $|A_n|$  para cualquier valor de  $n$ .

MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 12.** Es posible encontrar una matriz  $A$  regular de orden 3 tal que su adjunta  $Adj(A)$  sea nula. ¿Verdadero o falso?.

## 4.2. Cálculo del rango de una matriz

En el capítulo de matrices ya hemos estudiado el concepto de **rango**. Los determinantes se pueden utilizar para determinar el rango de una matriz, basándonos en que el determinante de una matriz con una línea combinación lineal de otras paralelas es cero.

### • Menores de una matriz

De una matriz  $A$  se pueden extraer submatrices cuadradas. A los determinantes de dichas submatrices los llamamos **menores**.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

menores de orden 2 son por ejemplo

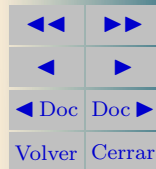
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2 \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 0$$



MaTeX

DETERMINANTES



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = 1$$

También podemos extraer menores de orden 3, que en este caso son todos nulos. En este caso, el rango como hicimos en el capítulo de matrices por reducción es,

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

pues es el número de filas no nulas de la matriz reducida. Este coincide con el mayor menor que se puede extraer de  $A$ , que es de orden 2. Si hay un menor no nulo, su orden indica el **rango** de la matriz. En este caso  $r(A) = 2$ . En general se tiene:

El mayor menor no nulo da el rango de la matriz

### • Método práctico

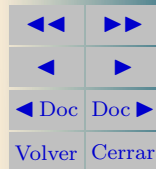
Resaltamos a continuación dos indicaciones para el estudio del rango:

- a) Cuando la matriz consta solo de números se aconseja utilizar el método de reducción.
- b) Cuando la matriz consta de algún parámetro se aconseja analizar en primer lugar el mayor determinante que se pueda extraer de la matriz.



# MaTeX

DETERMINANTES



En el siguiente ejemplo ilustramos el cálculo del rango por menores, pero como hemos dicho antes se recomienda utilizar el método de reducción si la matriz no tiene parámetros.

**Ejemplo 4.3.** Utilizando el método de los menores, hallar el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

*Solución:* Como el menor  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ , el  $rg(A) \geq 2$ . Se añade una fila

y columna  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$ , Se prueba con la misma fila y otra columna

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$ , luego la tercera fila es combinación lineal de las filas primera

y segunda. Ahora probamos con la cuarta fila,  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , luego

$rg(A) = 3$ . □



MaTeX

DETERMINANTES





**Ejemplo 4.4.** Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro  $k$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

*Solución:* Analizamos en primer lugar el mayor determinante que se pueda extraer de la matriz y que contenga a  $k$ , por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & k & -1 \end{vmatrix} = -7 - 7k = 0 \implies k = -1$$

Si  $k = -1$ , sustituyendo en  $A$  y reduciendo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim^2 \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies r(A) = 2$$

Si  $k \neq -1$ , entonces  $r(A) = 3$ . □

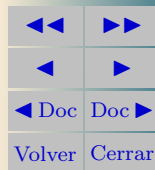
---

<sup>1</sup> $(f_2 - 2f_1), (f_3 - 4f_1)$

<sup>2</sup> $(f_3 - f_2)$

MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 13.** Utilizando el método de los menores, hallar el rango de las matrices

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad b) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 14.** Hallar el valor de  $k$  para que el rango de la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$$

sea 2.

**EJERCICIO 15.** Discutir en función del parámetro el rango de:

$$(a) M = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b) N = \begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 2 & 2 & c+1 \\ 4 & 2c+2 & c^2+3 \end{pmatrix}$$

**EJERCICIO 16.** Discutir en función del parámetro el rango de:

$$(a) P = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 2 \\ 2 & b & b^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b) Q = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{pmatrix}$$



MaTeX

DETERMINANTES







**Ejercicio 17.** Hallar las raíces del polinomio en función de  $a$ :

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

**Ejercicio 18.** Hallar  $x$  para que  $A$  no tenga inversa, siendo

$$A = \begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 19.** Hallar los valores de  $k$  para los cuales la matriz no tenga inversa:

$$A = \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 20.** Determinar para que valores de  $\alpha$ , tiene solución la ecuación matricial:  $A^2 X + A X = B$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

MaTeX

DETERMINANTES





**Ejercicio 21.** Resolver la ecuación matricial:

$$B(2A + I) = AXA + B$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 22.** Si  $a, b$  y  $c$  son no nulos, estudiar el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 23.** Estudiar según los valores de  $a, b$  y  $c$  el rango de la matriz

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 24.** Hallar  $a$  para que  $r(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & a-1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & a^2 & -1 \\ 3 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 25.** Hallar si es posible, un valor de  $a$  para que  $r(B) = 2$  y otro para que  $r(B) = 3$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 2\alpha \\ \alpha^2 & -1 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & \alpha + 1 & 2\alpha - 2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 26.** Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 12 \quad \text{hallar} \quad \begin{vmatrix} a + 2d & c + 2f & b + 2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix}$$

**Ejercicio 27.** Resolver la ecuación  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$



MaTEX

DETERMINANTES





## Soluciones a los Ejercicios

### Ejercicio 1.

a) Aplicando la propiedad **D1a** a la primera columna,

$$\begin{vmatrix} a+1 & 4 \\ a+2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 4 \\ a & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

b) Aplicando la propiedad **D1a** dos veces

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a-1 & 2a+4 \\ 1+a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2a \\ 1+a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1+a & a \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} a & 2a \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 2a \\ a & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ a & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 1

MaTeX

DETERMINANTES





## Ejercicio 2.

- a) Si en un determinante una línea es múltiplo de otra paralela, el determinante es nulo. D9
- b) Si en un determinante se intercambian dos líneas paralelas consecutivas, el determinante cambia de signo.

Se produce un cambio de signo por cada permutación: Propiedad D2

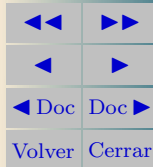
Contamos los cambios por columnas:

$(c_1, c_2, c_3)$	inicio
$(c_1, c_3, c_2)$	-
$(c_3, c_1, c_2)$	+
$(c_3, c_2, c_1)$	-

Ejercicio 2

# MaTeX

DETERMINANTES



$$\text{Ejercicio 3(a)} \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{array} \right| \stackrel{(1)}{=} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{array} \right| =$$

$$\stackrel{(2)}{=} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(b-a) \end{array} \right| = (b-a)(c-a)(c-b)$$

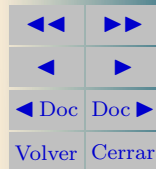
1. Reducimos con  $f_3 - a f_2$  y con  $f_2 - a f_1$ .
2. Reducimos con  $f_3 - b f_2$ .

□



MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 3(b)** Utilizamos propiedades para que el alumno las aprenda

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{D3}{=} 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{D2}{=} \\
 & = -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \\
 & \quad 7f_3 - f_2 - \frac{2}{7} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 31 \end{vmatrix} = 62
 \end{aligned}$$

1. Reducimos con  $f_2 - 2f_1$  y  $f_3 + f_1$

□



MaTEX

DETERMINANTES





**Ejercicio 4.** Obtenemos ceros usando la primera fila:

a)

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \underline{(1)} \\ 4 & 2 & 0 & \\ 1 & 1 & 5 & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \\ 0 & -10 & -4 & \underline{(2)} \\ 0 & -2 & 4 & \end{array} \right| \underline{(2)} \quad -48$$

(1) Reducimos con  $f_2 - 4f_1$  y  $f_3 - f_1$ .

(2) Desarrollamos por adjuntos en la primera columna

b)

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \underline{(1)} \\ 2 & 3 & 4 & \\ 3 & 1 & 1 & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \\ 0 & -3 & 2 & \underline{(2)} \\ 0 & -8 & -2 & \end{array} \right| \underline{(2)} \quad 22$$

(1) Reducimos con  $f_2 - 2f_1$  y  $f_3 - 3f_1$ .

(2) Desarrollamos por adjuntos en la primera columna

c)

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \underline{(1)} \\ 3 & 3 & 3 & \\ 4 & 5 & 6 & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \\ 0 & -6 & 0 & \underline{(2)} \\ 0 & -7 & 2 & \end{array} \right| \underline{(2)} \quad -12$$

(1) Reducimos con  $f_2 - 3f_1$  y  $f_3 - 4f_1$ .

(2) Desarrollamos por adjuntos en la primera columna

MaTEX

DETERMINANTES

Ejercicio 4





**Ejercicio 5(a)** Obtenemos ceros en la tercera fila usando como pivote el elemento  $a_{31} = -1$ .

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cccc} 3 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 1 \end{array} \right| \stackrel{(1)}{=} \left| \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 10 & 5 \\ 2 & 4 & 11 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right| = \\ & \stackrel{(2)}{=} - \left| \begin{array}{ccc} 0 & 10 & 5 \\ 4 & 11 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right| \stackrel{(3)}{=} 4 \left| \begin{array}{cc} 10 & 5 \\ 2 & 1 \end{array} \right| - 3 \left| \begin{array}{cc} 10 & 5 \\ 11 & 7 \end{array} \right| = -45 \end{aligned}$$

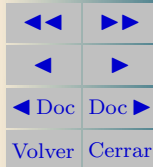
- (1) Reducimos con  $c_2 + c_1$  y  $c_3 + 2c_1$ .
- (2) Desarrollamos por adjuntos en la tercera fila.
- (3) Desarrollamos por adjuntos en la primera columna.

□



MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 5(b)** Obtenemos ceros en la segunda columna usando como pivote el elemento  $a_{12} = 1$ .

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array} \right| \stackrel{(1)}{=} \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right| = \\ & \stackrel{(2)}{=} - \left| \begin{array}{ccc} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ -5 & -1 & 5 \end{array} \right| \stackrel{(3)}{=} - \left| \begin{array}{ccc} 13 & 3 & 17 \\ 24 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right| \stackrel{(4)}{=} -44 \end{aligned}$$

- (1) Reducimos con  $f_2 - f_1$ ,  $f_3 - 2f_1$  y  $f_4 - 3f_1$ .
- (2) Desarrollamos por adjuntos en la segunda columna.
- (3) Reducimos con  $c_1 + 5c_2$  y  $c_3 + 5c_2$ .
- (4) Desarrollamos por adjuntos en la tercera fila.

□



MaTeX

DETERMINANTES



## Ejercicio 6(a)

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} a+4 & 1 & 1 & 1 \\ a+4 & a+1 & 1 & 1 \\ a+4 & 1 & a+1 & 1 \\ a+4 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = \\
 & \stackrel{D1}{=} (a+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} (a+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \\
 & = a^3(a+4)
 \end{aligned}$$

- (1) Reducimos sumando a la  $c_1$  las restantes  $c_2 + c_3 + c_4$ .  
 (2) Reducimos restando a todas las filas la primera  $f_1$

□



MaTeX

DETERMINANTES



## Ejercicio 6(b)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \stackrel{(1/a) c_1}{=} a \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & b & c & c \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix} = \\ & \stackrel{(1)}{=} a \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c) \end{aligned}$$

1. Reducimos con  $f_4 - f_3$  y con  $f_3 - f_2$ .

□



MaTeX

DETERMINANTES



## Ejercicio 7(a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 21 & 23 & 25 & 27 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_2 - c_1 \\ = \\ c_4 - c_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 10 & 2 & 14 & 2 \\ 21 & 2 & 25 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{D4}{=} 0$$

□



MaTeX

DETERMINANTES





## Ejercicio 7(b)

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} -1 + 3x & x & x & x \\ -1 + 3x & -1 & x & x \\ -1 + 3x & x & -1 & x \\ -1 + 3x & x & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{D1}{=} (-1 + 3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & -1 & x & x \\ 1 & x & -1 & x \\ 1 & x & x & -1 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} (-1 + 3x)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & -1 - x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - x \end{vmatrix} = (-1 + 3x)(-1 - x)^3$$

1. Reducimos sumando a la  $c_1$  las restantes  $c_2 + c_3 + c_4$ .
2. Reducimos restando a todas las filas la primera  $f_1$ .

□

MaTeX

DETERMINANTES



**Prueba del Teorema 4.1.** Dada una matriz  $A = (a_{ij})$  de orden  $n \times n$  se cumple que la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de otra línea paralela es 0,

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{jn} = 0 \quad i \neq j$$

Obsérvese que la expresión anterior equivale al desarrollo por la fila  $f_j$  del siguiente determinante, donde las filas  $f_i$  y  $f_j$  son iguales.

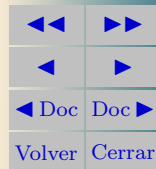
$$\begin{array}{l} \text{fila } i \\ \text{fila } j \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Esta propiedad nos permitirá construir la matriz inversa de una matriz. ▶



# MaTEX

DETERMINANTES



**Ejercicio 8.**

$$a) A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b) B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c) C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -38 & 6 & 22 \\ 6 & -1 & -3 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$d) D^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 20 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

**MaT<sub>E</sub>X**

DETERMINANTES

Ejercicio 8





**Ejercicio 9.**

$$a) AX = B \implies A^{-1}AX = A^{-1}B \implies \boxed{X = A^{-1}B}$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) XA = B \implies XAA^{-1} = BA^{-1} \implies \boxed{X = BA^{-1}}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) AXB = I \implies A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1}B^{-1} \implies \boxed{X = A^{-1}B^{-1}}$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -11 \end{pmatrix}$$

$$d) BXA = I \implies B^{-1}BXAA^{-1} = B^{-1}A^{-1} \implies \boxed{X = B^{-1}A^{-1}}$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9

MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 10.**

- a) Falso. Ya hemos visto que es necesario y suficiente que su determinante sea distinto de cero. **CONDICIÓN 5**
- b) Verdadero pues

$$|A \cdot A^{-1}| = |I_d| = 1 = |A| |A^{-1}| \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{3}$$

Propiedad D9

- c) Como

$$\begin{cases} |A| = -\frac{1}{2} & \Rightarrow & |A^{-1}| = -2 \\ |B| = -\frac{2}{3} & \Rightarrow & |B^{-1}| = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

luego por la regla de Laplace

$$|A^{-1} B^{-1}| = |A^{-1}| \cdot |B^{-1}| = (-2)\left(-\frac{3}{2}\right) = \mathbf{3}$$

Ejercicio 10

MaTeX

DETERMINANTES





**Ejercicio 11(a)** Lo vemos para  $n = 3$ :

$$\lambda A_3 = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

De la propiedad D1b, se tiene

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

luego

$$|\lambda A_3| = \lambda^3 |A_3|$$

y para el caso  $n$ ,

$$|\lambda A_n| = \lambda^n |A_n|$$

□

MaTEX

DETERMINANTES





**Ejercicio 11(b)** De la expresión de la inversa, se tiene que:

$$A \cdot Adj(A^T) = |A| I_n$$

Tomando determinantes

$$|A \cdot Adj(A^T)| = ||A| I_n|$$

$$|A| \cdot |Adj(A^T)| = ||A| I_n| \quad (\text{Regla de Laplace})$$

$$|A| \cdot |Adj(A)| = ||A| I_n| \quad (|A| = |A^T|)$$

$$|A| \cdot |Adj(A)| = |A|^n |I_n| \quad (\text{apartado anterior})$$

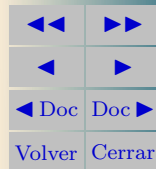
$$|A| \cdot |Adj(A)| = |A|^n \quad (|I_n| = 1)$$

$$|Adj(A)| = |A|^{n-1} \quad (\text{simplificando})$$

□

# MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 12.**

Falso, pues si  $\text{Adj}(A)$  es nula todos los menores de orden 2 de  $A$  son cero. Si desarrollamos el determinante de  $A$  por adjuntos también valdrá cero, y por tanto no puede ser regular.

Ejercicio 12

*MaTEX*

DETERMINANTES



**Ejercicio 13.**

a) Como el menor  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ , el  $rg(A) = 2$  pues no hay menores de orden 3.

b) Como el menor  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ , el  $rg(B) \geq 2$ .

Por otra parte como el único menor de orden 3,

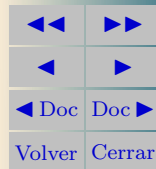
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

se tiene  $rg(B) = 2$ .

Ejercicio 13

MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 14.** Como el menor  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ , el  $\text{rg}(B) \geq 2$ . Para que no pueda ser 3 es necesario que su determinante sea nulo,  $|C| = 0$ ,

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{vmatrix} = 11k^2 - k - 12$$

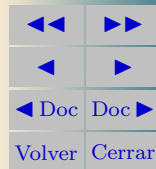
Para que  $11k^2 - k - 12 = 0$  es necesario que  $k = 12/11$  ó  $k = -1$ .

Ejercicio 14



MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 15(a)** Elegimos de  $M \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$  un menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -a + 3 = 0 \implies a = -3$$

Si  $a \neq -3 \implies r(M) = 3$ , y para  $a = -3$  sustituimos en  $M$  y reducimos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim^1 \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \implies r(M) = 3$$

para todo valor de  $a$  se tiene  $r(M) = 3$

□



# MaTeX

DETERMINANTES




---

<sup>1</sup> $(f_2 - 2f_1), (f_3 - f_1)$



**Ejercicio 15(b)** Calculamos

$$|N| = -2c(c-1)^2 = 0 \implies c = 0 \vee 1$$

■  $c = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \implies r(N) = 1$$

■  $c = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \implies r(N) = 2$$

□

MaTeX

DETERMINANTES




---

<sup>1</sup> $(f_2 - 2f_1), (f_3 - 4f_1)$



**Ejercicio 16(a)** Elegimos de  $P$  un menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 2 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (b-1)(2b-1) = 0 \implies b = 1 \vee b = 1/2$$

$$\bullet b \neq 1 \wedge b \neq 1/2 \implies r(P) = 3$$

Si  $\bullet b = 1$  sustituimos en  $P$  y reducimos la matriz,  $r(P) = 2$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $\bullet b = 1/2$  sustituimos en  $P$  y reducimos la matriz,  $r(P) = 3$ .

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1/4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -14 & -15 & -28 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(1) f_2 - 2f_1, f_3 - f_1.$$

$$(2) 2f_1 \text{ y } 4f_2.$$

$$(3) f_2 - 8f_1 \text{ y } f_3 - f_1.$$

□

MaTeX

DETERMINANTES





**Ejercicio 16(b)** Elegimos de  $Q$  un menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1)^2(k+2) = 0 \implies k = 1 \vee k = -2$$

$$\bullet k \neq 1 \wedge k \neq -2 \implies r(Q) = 3$$

Si  $\bullet k = 1$  sustituimos en  $Q$  y reducimos la matriz,  $r(Q) = 1$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $\bullet k = -2$  sustituimos en  $Q$  y reducimos la matriz,  $r(Q) = 3$ .

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(1)  $f_2 - f_1, f_3 - f_1$ .

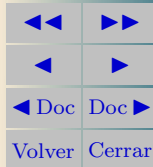
(2)  $2f_2 + f_1$  y  $2f_3 + f_1$ .

(3)  $f_3 + f_2$ .

□

MaTEX

DETERMINANTES



## Ejercicio 17.

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} x^2 + 3a & a & a & a \\ x^2 + 3a & x^2 & a & a \\ x^2 + 3a & a & x^2 & a \\ x^2 + 3a & a & a & x^2 \end{vmatrix} \\
 & \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} (x^2 + 3a) & a & a & a \\ 0 & x^2 - a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 - a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 - a \end{vmatrix} \\
 & = (x^2 + 3a)(x^2 - a)^3 = 0
 \end{aligned}$$

- Si  $a > 0$ , las raíces son  $x = \pm\sqrt{a}$ .
- Si  $a < 0$ , las raíces son  $x = \pm\sqrt{-3a}$ .
- Si  $a = 0$ , la única raíz es  $x = 0$ .

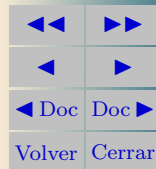
$$(1) c_1 + (c_2 + c_3 + c_4) \quad (2) f_2 - f_1, f_3 - f_1, f_4 - f_1$$

Ejercicio 17



MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 18.** Para que  $A$  no tenga inversa es necesario y suficiente que  $|A| = 0$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{vmatrix} = 2|x| - |x-2| = 0$$

Dependiendo de  $x$  tenemos las tres ecuaciones

$$\begin{cases} x \leq 0 & -2x + (x-2) = 0 & \implies \boxed{x=-2} \\ 0 < x \leq 2 & 2x + (x-2) = 0 & \implies \boxed{x=2/3} \\ 2 < x & 2x - (x-2) = 0 & \implies x = -2(\text{no vale}) \end{cases}$$

Ejercicio 18



MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 19.** Para que  $A$  no tenga inversa su determinante debe ser nulo,  $|A| = 0$ . Restamos a todas las filas la primera:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} = \\ & = -k \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} \stackrel{f_3-f_2}{=} -k \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k & 0 \end{vmatrix} = \\ & = -k^2 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -k-4 & -7 \end{vmatrix} = 3k^2(k-3) \end{aligned}$$

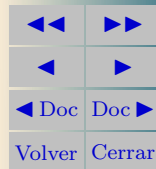
Para  $k = 0 \vee 3$  no existe la inversa de  $A$ .

Ejercicio 19



MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 20.**  $A^2 X + A X = B \Rightarrow (A^2 + A) X = B$ . Para que tenga solución debe existir la inversa de  $A^2 + A$  y por tanto  $|A^2 + A| \neq 0$ . Calculamos su expresión:

$$\begin{aligned} A^2 + A &= \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha + 2 & 2\alpha + 4 \\ \alpha + 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como  $|A^2 + A| = 2\alpha^2 - 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = 2$ .

Concluimos que existe solución si  $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 2$

Ejercicio 20



MaTeX

DETERMINANTES





**Ejercicio 21.** En primer lugar despejamos la matriz  $X$ ,

$$\begin{aligned} B(2A + I) &= AXA + B \Rightarrow 2BA + B = AXA + B \\ &\Rightarrow 2BA = AXA \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2A^{-1}BA A^{-1} = A^{-1}AXA A^{-1} \Rightarrow \mathbf{X = 2A^{-1}B} \end{aligned}$$

Calculamos  $A^{-1}$ :  $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ,  $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

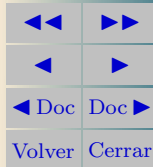
La solución es:

$$X = 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 21

MaTeX

DETERMINANTES





**Ejercicio 22.** Hallamos  $|A|$ ,

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} \stackrel{f_2 \pm f_1}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 0 & 4c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = 0$$

Luego  $r(A) < 3$  para cualquier valor de  $a, b$  y  $c$ . Tomemos ahora un menor de orden 2, el más cómodo es

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 3a & 0 \end{vmatrix} = -3ab \neq 0 \text{ pues } a \neq 0 \wedge b \neq 0$$

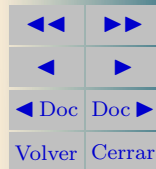
luego el rango  $r(A) = 2$  para cualquier valor de  $a, b$  y  $c$ .

Ejercicio 22



MaTeX

DETERMINANTES





**Ejercicio 23.** Hallamos  $|A|$ ,

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \stackrel{f_3+f_2}{=} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = 0$$

Luego  $r(A) < 3$  para cualquier valor de  $a, b$  y  $c$ . Tomemos ahora un menor de orden 2, el más cómodo es

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} = 5(a - b) = 0 \implies a = b$$

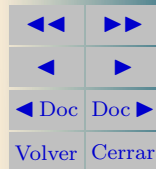
luego se ven dos casos

- $a = b = c \implies r(L) = r \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & a & a \\ 2a & 2a & 2a \end{pmatrix} = 1$
- $(a \neq b) \vee (a \neq c)$  con algún menor de orden 2 no nulo, luego  $r(L) = 2$ .

Ejercicio 23

MaTEX

DETERMINANTES



**Ejercicio 24.** Todos los menores de orden 3 deben ser nulos. Elegimos uno cómodo, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & a-1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -(2a-6) = 0 \implies a = 3$$

Es necesario que  $a = 3$ . Veamos si es suficiente

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & -1 \\ 3 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 19 & -2 \\ 0 & 3 & 19 & -2 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 19 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego si  $a = 3$ , el rango  $r(A) = 2$ .

(1)  $f_2 - f_1$ ,  $2f_3 - f_1$  y  $2f_4 - 3f_1$ .

(2)  $f_4 - f_3$ .

Ejercicio 24



MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 25.** Si  $r(B) = 3$ , el menor de orden 4 debe ser nulo. Hallamos  $|B| = 0$ :

$$|B| = -(2\alpha - 6)(2\alpha^2 - \alpha - 15) = 0 \implies \alpha = 3 \vee \alpha = -5/2$$

Estudiamos  $\alpha = 3$ .

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 6 \\ 9 & -1 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 20 & 28 \\ 0 & -1 & 20 & 28 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 20 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego si  $\alpha = 3$ , el rango  $r(B) = 2$ .

Estudiamos  $\alpha = -5/2$ . Escogemos un menor de orden 3

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies r(B) = 3$$

(1)  $f_2 - 2f_1$ ,  $2f_3 + 9f_1$  y  $f_4 + 8f_1$

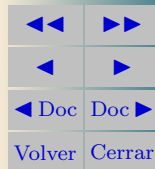
(2)  $f_4 - f_3$

Ejercicio 25



MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 26.**

$$\begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & c & b \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2d & 2f & 2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(2)}{=} -3 \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} d & f & e \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(3)}{=} -3(-12) - 6(0) = \mathbf{36}$$

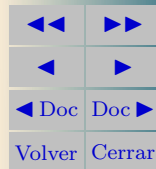
- (1) Propiedad D1a  
 (2) Propiedad D1b  
 (3) Propiedad D2 y D4

Ejercicio 26



MaTeX

DETERMINANTES



**Ejercicio 27.** Como  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 27



MaTeX

DETERMINANTES



## Soluciones a los Tests

**Solución al Test:** Por la propiedad D1b, el número buscado es  $\star = 3$ , pues

$$\begin{vmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Final del Test



# MaTEX

DETERMINANTES



## Índice alfabético

adjunto, 11

cálculo del rango, 21

determinante

cálculo del, 9

definición, 3

desarrollo por adjuntos, 12

propiedades, 4, 5

inversa de una matriz, 16–18

matriz adjunta, 11

menor, 20



MaTeX

DETERMINANTES

