

Proyecto MaTeX

Rectas y Planos

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

© 2004 javier.gonzalez@unican.es
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

RECTAS Y
PLANOS

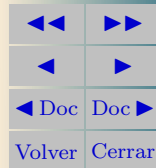


Tabla de Contenido

1. Sistema de referencia

- Vector de dos puntos • Punto medio de dos puntos

2. Ecuaciones de la recta

2.1. Tipos de Ecuaciones de la recta

3. Ecuación del plano

3.1. Tipos de Ecuaciones del plano

4. Posición relativa de dos planos

4.1. Haz de planos

5. Posición relativa de recta y plano

6. Posición relativa de tres planos

7. Posición relativa de dos rectas

- Rectas paralelas • Rectas coincidentes • Rectas que se cortan o se cruzan

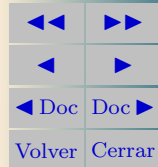
Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests



MaTeX

RECTAS Y
PLANOS



1. Sistema de referencia

Un **sistema de referencia** en el espacio consta de un punto O llamado origen y tres vectores $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Cualquier punto $P(x_0, y_0, z_0)$ tiene un vector de posición \overrightarrow{OP} .

$$\overrightarrow{OP} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$$

- Vector de dos puntos**

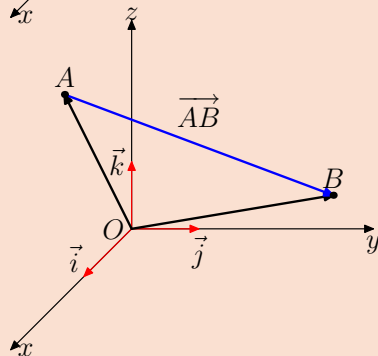
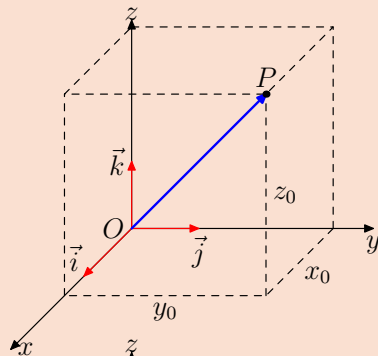
Dados los puntos $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$ se tiene

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

luego

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$



MaTeX

RECTAS Y
PLANOS





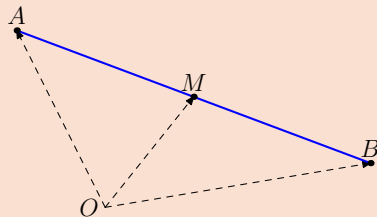
• Punto medio de dos puntos

Dados los puntos $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$ se tiene que el punto medio del segmento AB verifica

$$\overrightarrow{AB} = 2 \overrightarrow{AM}$$

luego

$$(B-A) = 2(M-A) \implies M = \frac{A+B}{2}$$



$$M = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2} \right)$$

Ejemplo 1.1. Hallar el vector \overrightarrow{AB} y el punto medio de los puntos $A(-1, 3, 4)$ y $B(3, 1, 2)$.

Solución:

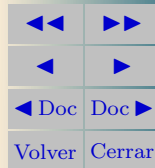
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1, 2) - (-1, 3, 4) = (4, -2, 2)$$

$$M = \left(\frac{-1 + 3}{2}, \frac{3 + 1}{2}, \frac{4 + 2}{2} \right) = (1, 2, 3)$$

□

MaTeX

RECTAS Y PLANOS





2. Ecuaciones de la recta

Definición 2.1 La ecuación de una recta viene determinada por un punto $A(x_0, y_0, z_0)$ y un vector \vec{u} .

$$r \equiv \langle A; \vec{u} \rangle$$

En el dibujo se observa que un punto X pertenece a la recta r , si el vector \vec{AX} es proporcional al vector \vec{u} , es decir $\vec{AX} = \lambda \vec{u}$ para algún $\lambda \in R$.

Siendo

$$\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX}$$

$$\vec{AX} = \vec{OX} - \vec{OA}$$

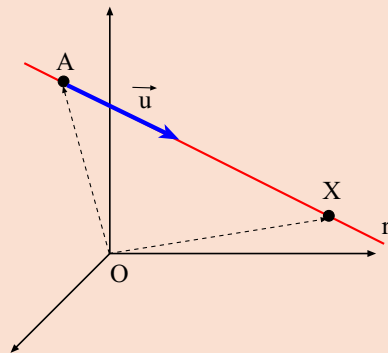
$$\vec{OX} - \vec{OA} = \lambda \vec{u}$$

$$(X - O) - (A - O) = \lambda \vec{u}$$

despejando X se obtiene la ecuación

$$\mathbf{r} \equiv X = A + \lambda \vec{u}$$

(1)



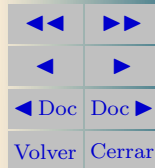
en coordenadas se obtiene

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (u_1, u_2, u_3)$$

Dependiendo de como escribamos la expresión anterior obtenemos diferentes ecuaciones de la recta.

MaTeX

RECTAS Y
PLANOS





2.1. Tipos de Ecuaciones de la recta

- **Ecuación Vectorial.** Expresando la **ecuación 1** en coordenadas

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (u_1, u_2, u_3)$$

- **Ecuaciones Paramétricas.** Separando las componentes

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \lambda u_1 \\ y &= y_0 + \lambda u_2 \\ z &= z_0 + \lambda u_3 \end{aligned} \right\}$$

- **Ecuaciones Continua.** Despejando en la expresión anterior el parámetro λ e igualando

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

- **Ecuaciones Cartesianas.** Operando las igualdades, es decir, agrupando términos y ordenando se obtiene las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Ejemplo 2.1. Determinar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, 2, 1)$ y $B(0, 3, 2)$.

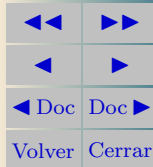
Solución: El vector director $\vec{u} = \vec{AB} = (-1, 1, 1)$

- **Ecuación Vectorial.** $(x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda (-1, 1, 1)$

MaTEX

RECTAS Y

PLANOS



■ **Ecuaciones Paramétricas.**
$$\left. \begin{aligned} x &= 1 - \lambda \\ y &= 2 + \lambda \\ z &= 1 + \lambda \end{aligned} \right\}$$

■ **Ecuación Continua.**
$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$$

■ **Ecuaciones Cartesianas.** Operando las igualdades, agrupando términos y ordenando se obtiene las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-1}{-1} &= \frac{y-2}{1} \\ \frac{y-2}{1} &= \frac{z-1}{1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

□

Ejemplo 2.2. Determinar de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$, su dirección y dos puntos de la misma.

Solución: La dirección viene dada por $\vec{u} = (2, 3, 1)$. Un punto es $A(1, -1, 2)$. Para hallar otro punto usamos la expresión vectorial

$$r \equiv X = A + \lambda \vec{u}$$

Haciendo $\lambda = 2$ obtenemos

$$X_1 = (1, -1, 2) + 2(2, 3, 1) = (5, 5, 4)$$



MaTEX

RECTAS Y
PLANOS



Haciendo $\lambda = 3$ obtenemos

$$X_2 = (1, -1, 2) + 3(2, 3, 1) = (7, 8, 5)$$

y así sucesivamente para obtener más puntos. □

Ejemplo 2.3. Dada la recta:
$$\left. \begin{aligned} x &= 1 - 3\lambda \\ y &= 2 + \lambda \\ z &= 1 + 2\lambda \end{aligned} \right\}$$

Determinar su vector direccional y dos puntos de la misma.

Solución:

Su vector direccional es $\vec{u} = (-3, 1, 2)$. Un punto es $A(1, 2, 1)$. Para hallar otro punto damos valores al parámetro λ , por ejemplo, haciendo $\lambda = 1$ obtenemos

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 - 3(1) = -2 \\ y &= 2 + (1) = 3 \\ z &= 1 + 2(1) = 3 \end{aligned} \right\}$$

□

Ejercicio 1. Comprobar si los puntos $A(2, 3, 1)$, $B(5, 4, 3)$ y $C(2, 1, 2)$ están alineados.

Ejercicio 2. Dados los puntos $A(m, 2, -3)$, $B(2, m, 1)$ y $C(5, 3, -2)$, determinar el valor de m para que estén alineados, y hallar la recta que los contiene.

Ejercicio 3. Dada la recta $r \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$, escribirla en forma continua.



MaTEX

RECTAS Y
PLANOS



3. Ecuación del plano

Definición 3.1 La ecuación de un plano viene determinada por un punto $A(x_0, y_0, z_0)$ y dos vectores \vec{u}, \vec{v} linealmente independientes.

$$\pi \equiv \langle A; \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

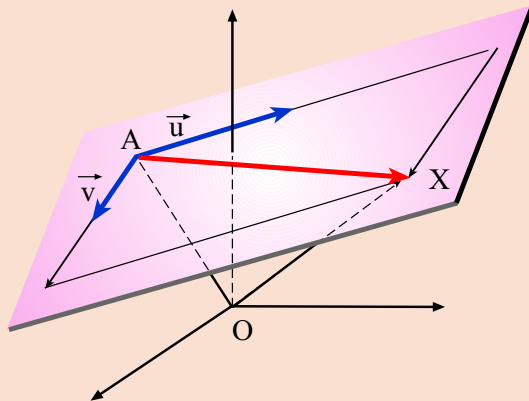
Un punto X pertenece al plano π , observar el dibujo, si el vector \overrightarrow{AX} es combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} , es decir

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

para algún $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}$$

Identificando $\overrightarrow{OX} = X$ y $\overrightarrow{OA} = A$ se obtiene la ecuación



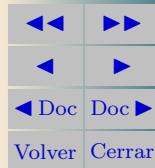
$$\pi \equiv X = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

(2)



MaTeX

RECTAS Y PLANOS





3.1. Tipos de Ecuaciones del plano

- **Ecuación Vectorial.** Expresando la **ecuación 2** en coordenadas

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

- **Ecuaciones Paramétricas.** Separando las componentes

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y &= y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z &= z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{aligned} \right\}$$

- **Ecuación Cartesiana.** Para hallar la ecuación cartesiana del plano hay que eliminar los parámetros λ y μ en las ecuaciones paramétricas. Como el vector \overrightarrow{AX} es combinación lineal de los vectores direccionales \vec{u} y \vec{v} , el rango de la matriz $(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v})$ es 2

$$\text{rg} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$$

y por tanto su determinante es nulo.

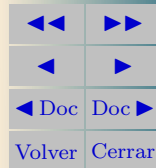
$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$$

(3)

MaTeX

RECTAS Y PLANOS



Ejemplo 3.1. Determinar las ecuaciones del plano que pasa por los puntos $A(2, 3, 5)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(3, 6, 10)$.

Solución: La dirección viene dada por los vectores

$$\overrightarrow{AB}(-1, -2, -3) \quad \overrightarrow{AC}(1, 3, 5)$$

Ecuación Vectorial

$$\pi \equiv (x, y, z) = (2, 3, 5) + \lambda(-1, -2, -3) + \mu(1, 3, 5)$$

Ecuaciones Paramétricas

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 - \lambda + \mu \\ y &= 3 - 2\lambda + 3\mu \\ z &= 5 - 3\lambda + 5\mu \end{aligned} \right\}$$

Ecuación Cartesiana

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Se desarrolla por adjuntos por la primera fila

$$\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$$

□



MaTeX

RECTAS Y
PLANOS



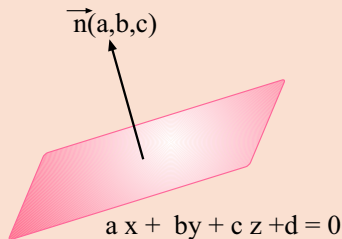


En la ecuación general del plano:

$$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$$

los coeficientes (a, b, c) corresponden a las componentes del vector **perpendicular** al plano y se le denomina el vector **normal** del plano π .

$$\vec{n}(a, b, c)$$



Ejemplo 3.2. Determinar las ecuaciones paramétricas del plano

$$\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$$

Solución: Elegimos dos variables libres como parámetros, por ejemplo $y = \lambda$ y $z = \mu$, quedando

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

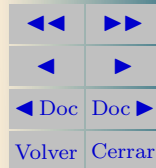
La dirección viene dada por los vectores

$$\vec{u}(2, 1, 0) \quad \vec{v}(-1, 0, 1)$$

□

MaTeX

RECTAS Y
PLANOS



Ejercicio 4. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2, 0, 1)$ y contiene a la recta de ecuación :

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$$

Ejercicio 5. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A(1, 0, 0)$ y es perpendicular al plano $x - y - z + 2 = 0$.

Ejercicio 6. Determinar la ecuación de un plano que contenga a la recta r y sea perpendicular al plano π , siendo:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1} \quad \pi : \begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Test. El punto $A(0, 1, 2)$ y los vectores $\vec{u}(1, 2, 3)$ y $\vec{v}(2, 4, 6)$ determinan un plano

(a) Si (b) No

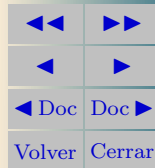
Test. El punto $A(7, -4, 2)$ y la recta $\frac{x-2}{5} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+1}{3}$ determinan un plano

(a) Si (b) No



MaTeX

RECTAS Y
PLANOS





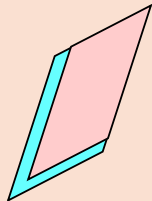
4. Posición relativa de dos planos

Teorema 4.1. Sean dos planos $\pi_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$
 $\pi_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2$

Estudiamos el sistema lineal de 2 ecuaciones con 3 incógnitas:

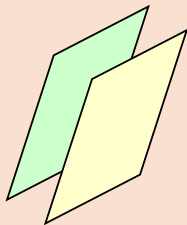
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{A_1 \quad B_1 \quad C_1}^A & D_1 \\ \underbrace{A_2 \quad B_2 \quad C_2}_{AM} & D_2 \end{pmatrix}}_{AM} \quad \begin{array}{l} r(A) = 1 \quad r(AM) = 1 \Rightarrow \pi_1 \equiv \pi_2 \\ r(A) = 1 \quad r(AM) = 2 \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2 \\ r(A) = 2 \quad r(AM) = 2 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \{r\} \end{array}$$

$$r(A)=r(AM)=1$$



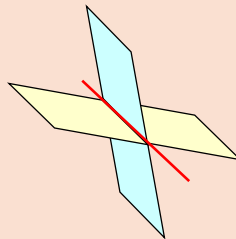
$$\pi_1 = \pi_2$$

$$r(A)=1 \quad r(AM)=2$$



$$\pi_1 \parallel \pi_2$$

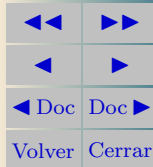
$$r(A)=2 \quad r(AM)=2$$



$$\pi_1 \cap \pi_2 = \{r\}$$

MaTeX

RECTAS Y
PLANOS





Ejemplo 4.1. Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned}\pi_1 &\equiv 3x - 2y + 4z = 2 \\ \pi_2 &\equiv 2x + 3y - 5z = -8\end{aligned}$$

Solución:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & -8 \end{pmatrix}}_{AM} \stackrel{3f_2 - 2f_1}{\equiv} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 13 & -23 & -28 \end{pmatrix}}_{AM}$$

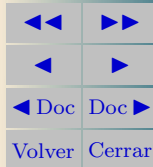
Como $r(A) = r(AM) = 2$ los planos determinan una recta, $\pi_1 \cap \pi_2 = \{r\}$.
Para hallar r resolvemos el sistema pasando z como variable libre. De la segunda ecuación $y = -\frac{28}{13} + \frac{23}{13}z$ y sustituyendo en la primera ecuación $x = -\frac{10}{13} - \frac{2}{13}z$, luego la recta es

$$\begin{cases} x = -\frac{10}{13} - \frac{2}{13}\lambda \\ y = -\frac{28}{13} + \frac{23}{13}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

□

MaTEX

RECTAS Y
PLANOS





Ejemplo 4.2. Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned}\pi_1 &\equiv 3x - 2y + 4z = 1 \\ \pi_2 &\equiv -6x + 4y - 8z = -2\end{aligned}$$

Solución: Como

$$\frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} = \frac{4}{-8} = \frac{1}{-2}$$

los planos son coincidentes.

□

Ejemplo 4.3. Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned}\pi_1 &\equiv 3x - 2y + 4z = 1 \\ \pi_2 &\equiv -6x + 4y - 8z = 0\end{aligned}$$

Solución:

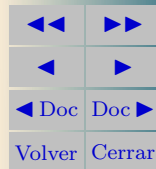
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 1 \\ -6 & 4 & -8 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2+2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Como $r(A) = 1 < r(AM) = 2$ los planos son paralelos.

□

MaTEX

RECTAS Y
PLANOS





4.1. Haz de planos

Definición 4.1 Sea la recta r determinada por los planos π_1 y π_2 .

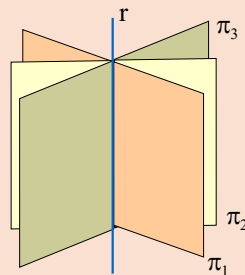
$$r \equiv \begin{cases} \pi_1 & \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ \pi_2 & \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

llamamos **haz de planos** a los infinitos planos que pasan por r . Su expresión viene dada por:

$$\alpha(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$$

La figura muestra el haz de planos. Se asemeja a un libro con infinitas hojas (los planos). Dando valores a los parámetros α y β no nulos a la vez, se obtienen los infinitos planos del haz.

$$\alpha \pi_1 + \beta \pi_2 = 0$$



Ejemplo 4.4. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2, -1, 3)$ y contiene a la recta determinada por los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv x - y + z = 2 \\ \pi_2 &\equiv 2x + y - z = -1 \end{aligned}$$

MaTEX

RECTAS Y PLANOS





Solución: El plano buscado está en el haz

$$\alpha(x - y + z - 2) + \beta(2x + y - z + 1) = 0$$

exigimos que pase por el punto $P(2, -1, 3)$

$$\alpha(2 + 1 + 3 - 2) + \beta(2(2) - 1 - 3 + 1) = 0$$

es decir

$$4\alpha + \beta = 0 \implies \beta = -4\alpha$$

Haciendo $\alpha = 1 \implies \beta = -4$, y sustituyendo se obtiene

$$7x + 5y - 5z + 6 = 0$$

□

Ejercicio 7. Dada la recta r formada por π_1 y π_2 :

$$\pi_1 \equiv x - y = 2$$

$$\pi_2 \equiv y - z = 1$$

Hallar:

- La expresión de todos los planos que la contienen.
- El plano que contiene a r y pasa por el origen.
- El plano que contiene a r y es paralelo $x - z = 5$.

MaTeX

RECTAS Y
PLANOS





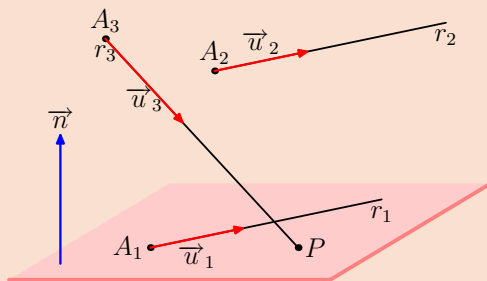
5. Posición relativa de recta y plano

Teorema 5.1. Sean la recta r y el plano π :

$$r \equiv \frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}$$

$$\pi \equiv ax + by + cz = d$$

Para estudiar la posición relativa de la recta y el plano, se compara el vector de la recta $\vec{u}(u, v, w)$ con el vector normal $\vec{n}(a, b, c)$ del plano. Se pueden presentar tres casos:



$$1. \quad \vec{u}_1 \perp \vec{n} \text{ y } A_1 \in \pi \Rightarrow r_1 \subset \pi.$$

Contenida.

$$2. \quad \vec{u}_2 \perp \vec{n} \text{ y } A_2 \notin \pi \Rightarrow r_2 \parallel \pi.$$

Paralela.

$$3. \quad \vec{u}_3 \not\perp \vec{n} \Rightarrow r_3 \cap \pi = \{P\}.$$

Se cortan.

MaTeX

RECTAS Y
PLANOS



Ejemplo 5.1. Determinar b para que la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{b} = \frac{z}{6}$$

no corte al plano $\pi : 2x - 4y + 5z = 0$

Solución:

Para que r no corte al plano tiene que ser paralela, luego

$$\vec{u}(3, b, 6) \perp \vec{n}(2, -4, 5)$$

$$\vec{u}(3, b, 6) \cdot \vec{n}(2, -4, 5) = 0 = 36 - 4b = 0 \implies \boxed{b = 9}$$

Si $b = 9$, $r \parallel \pi$, veamos que no esta contenida comprobando que no tienen un punto común. Tomamos $A(1, 2, 0) \in r$ y sustituimos en π .

$$2(1) - 4(2) + 5(0) = -6 \neq 0 \implies r \parallel \pi$$

□

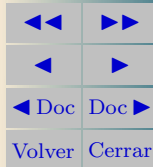
Ejercicio 8. Dados el plano $\pi : x + y + mz = n$, y la recta

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

- Calcular m y n para que π contenga a r .
- Calcular m y n para que π y r sean paralelos.
- Calcular m y n para que π y r sean secantes.

MaTeX

RECTAS Y
PLANOS



6. Posición relativa de tres planos

Sean los planos π_1, π_2 , y π_3 :

$$\begin{array}{l} \pi_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1 \\ \pi_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2 \\ \pi_3 \equiv A_3 x + B_3 y + C_3 z = D_3 \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array} \right)}_{AM}$$

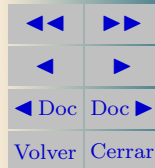
Se analiza el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas discutiendo los rangos de las matrices A y la ampliada AM . Se pueden presentar los siguientes casos:

- $r(A) = 1$ $r(AM) = 1$, planos coincidentes.
- $r(A) = 1$ $r(AM) = 2$, planos paralelos.
- $r(A) = 2$ $r(AM) = 2$, Haz de planos, pudiendo haber dos de ellos coincidentes. Tienen una recta en común.
- $r(A) = 2$ $r(AM) = 3$, los 3 planos no tienen puntos comunes, pueden ser 2 paralelos que intersecan respectivamente al otro, o bien, se intersecan dos a dos en respectivas rectas.
- $r(A) = 3$ $r(AM) = 3$, los planos tienen un punto en común.



MaTeX

RECTAS Y
PLANOS



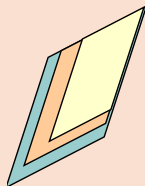


MaTeX

RECTAS Y PLANOS

$$r(A)=1$$

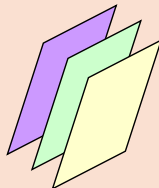
$$r(AM)=1$$



$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$$

$$r(A)=1$$

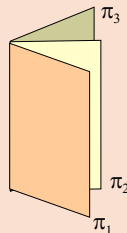
$$r(AM)=2$$



$$\pi_1 \parallel \pi_2$$

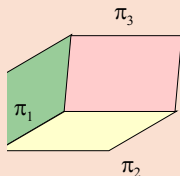
$$r(A)=2$$

$$r(AM)=2$$



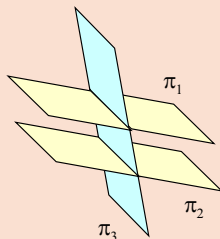
$$r(A)=3$$

$$r(AM)=3$$



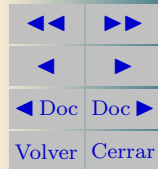
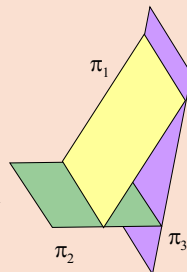
$$r(A)=2$$

$$r(AM)=3$$



$$r(A)=2$$

$$r(AM)=3$$





Ejemplo 6.1. Discutir la posición relativa de los planos:

$$\begin{cases} \alpha : x + y + kz = 1 \\ \beta : kx + y + z = 1 \\ \gamma : 2x + y + z = k \end{cases}$$

Solución: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = 0 \implies k = 1 \vee k = 2$

$$k = 1 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{1 & 1 & 1}^A & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{AM} = \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{1 & 1 & 1}^A & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{AM} \Rightarrow \begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(AM) = 2 \\ \text{Haz de planos} \end{matrix}$$

$$k = 2 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{1 & 1 & 2}^A & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{AM} = \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{1 & 1 & 1}^A & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{AM} \Rightarrow \begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(AM) = 3 \\ \alpha \cap \beta = r_1 \\ \alpha \cap \gamma = r_2 \\ \beta \parallel \gamma \end{matrix}$$

Si $k \neq 1; 2$, $r(A) = r(AM) = 3$, S.C.D. y los tres planos se cortan en un punto. \square

MaTEX

RECTAS Y
PLANOS





Ejemplo 6.2. Discutir la posición relativa de los planos:

$$\left. \begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 3x - 2y + z &= 1 \\ 6x + y - 2z &= 7 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{f}_3 - 6\text{f}_1]{\text{f}_2 - 3\text{f}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{f}_3 - \text{f}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. $r(A) = r(AM) = 2$, S.C.I, los tres planos tienen una recta en común. \square

Ejercicio 9. Dados los planos :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_\alpha : 2x - ky - 4z = 2 \\ \pi_\beta : kx - y + z = -3 \\ \pi_\gamma : x + y + z = 1 \end{array} \right.$$

1. ¿Para qué k , determinan π_α y π_β una recta, $r(k)$?
2. Estudiar la posición relativa de las rectas $r(k)$, respecto del plano γ .

MaTeX

RECTAS Y
PLANOS





7. Posición relativa de dos rectas

Sean dos rectas cualesquiera

$$r : A + \lambda \vec{u} \quad s : B + \mu \vec{v}$$

Las posibles posiciones relativas entre ellas son:

- **Rectas paralelas**

Dos rectas r y s son paralelas si tienen la misma dirección.

Ejemplo 7.1. Comprobar que las rectas r y s son paralelas:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3} \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$$

Solución: En efecto, los vectores $\vec{u}(1, 1, 3)$ y $\vec{v}(2, 4, 6)$ son proporcionales, luego r y s tienen la misma dirección. \square

- **Rectas coincidentes**

Dos rectas r y s son coincidentes, si son paralelas y tienen un punto en común.

Ejemplo 7.2. Comprobar que las rectas r y s no son coincidentes:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3} \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$$

MaTeX

RECTAS Y
PLANOS



Solución: En efecto, por una parte, los vectores $\vec{u}(1, 1, 3)$ y $\vec{v}(2, 4, 6)$ son proporcionales, luego r y s son paralelas. Por otra parte como el punto $A(0, 1, -3)$ de r no satisface la ecuación de s , pues

$$\frac{0}{2} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{-3}{6}$$

las rectas son paralelas pero no coincidentes. □

• Rectas que se cortan o se cruzan

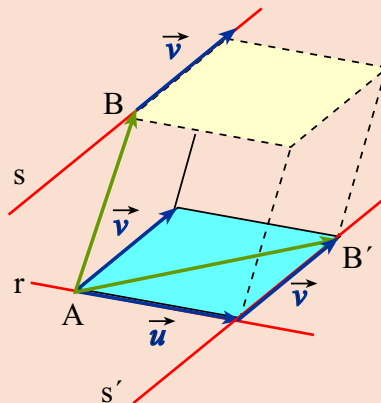
Si r y s no son paralelas hay dos posiciones de interés: que se corten o se crucen en el espacio. (Observar el gráfico inferior)

Si las rectas se cortan forman un plano y los vectores \vec{u}, \vec{v} y \overrightarrow{AB} son dependientes luego

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

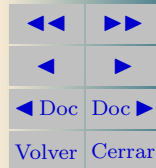
y si se cruzan en el espacio los vectores \vec{u}, \vec{v} y \overrightarrow{AB} son independientes luego

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) \neq 0$$



MaTeX

RECTAS Y PLANOS



Ejemplo 7.3. Comprobar que las rectas r y s se cruzan en el espacio:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3} \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$

Solución: En efecto, por una parte, los vectores $\vec{u}(1, 1, 3)$ y $\vec{v}(1, 0, 1)$ no son proporcionales, luego r y s no son paralelas. Formamos el vector $\overrightarrow{AB}(0, -1, 3)$ y calculamos $\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{se cruzan}$$

□

Ejemplo 7.4. Comprobar que las rectas r y s se cortan en el espacio:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3} \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$

Solución: En efecto, por una parte, los vectores $\vec{u}(1, 1, 3)$ y $\vec{v}(1, 0, 1)$ no son proporcionales, luego r y s no son paralelas. Formamos el vector $\overrightarrow{AB}(-2, 0, -2)$ y calculamos $\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{se cortan}$$

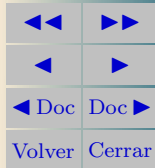
también decimos que las rectas son incidentes, secantes o coplanarias.

□



MaTeX

RECTAS Y
PLANOS



Otra forma equivalente de estudiar la posición relativa de dos rectas es estudiar el rango de las matrices determinadas por los vectores $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB})$, pudiéndose presentar los siguientes casos:

Posición relativa de dos rectas

1.
$$\left. \begin{array}{l} r\{\vec{u}, \vec{v}\} = 1 \\ r\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}\} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{r \text{ y } s \text{ son coincidentes.}}$$
2.
$$\left. \begin{array}{l} r\{\vec{u}, \vec{v}\} = 1 \\ r\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}\} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{r \text{ y } s \text{ son paralelas.}}$$
3.
$$\left. \begin{array}{l} r\{\vec{u}, \vec{v}\} = 2 \\ r\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}\} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{r \text{ y } s \text{ se cortan.}}$$
4.
$$\left. \begin{array}{l} r\{\vec{u}, \vec{v}\} = 2 \\ r\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}\} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{r \text{ y } s \text{ se cruzan.}}$$

Ejercicio 10. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3} \quad s \equiv \begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + 3y + 7z - 6 = 0 \end{cases}$$



MaTEX

RECTAS Y
PLANOS





Ejercicio 11. Determinar a y b para que las rectas sean paralelas

$$r \equiv 4x = 2y + 6 = z \quad s \equiv \begin{cases} 2x + ay - z = 1 \\ 2x + 3y + bz = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 12. Hallar los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + 5\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad s \equiv \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

Ejercicio 13. Estudiar según los valores del parámetro a , la posición relativa de las rectas r y s :

$$r \equiv \begin{cases} x = (a+2)\lambda \\ y = 1 \\ z = a \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{a-x}{1} = \frac{y-2}{a^3} = \frac{z-a}{a-1}$$

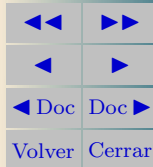
Ejercicio 14. Estudiar la posición relativa de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} kx + y + z = k^2 \\ x + y + kz = k \end{cases}$$

y el plano $\alpha : x + y + 2kz = 2$, según los valores del parámetro real k .

MaTEX

RECTAS Y
PLANOS



Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Para que estén alineados es necesario que los vectores

$$\overrightarrow{AB} = (3, 1, 2) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (0, -2, 1)$$

sean proporcionales. Como

$$\frac{3}{0} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1}$$

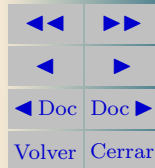
los puntos no están alineados.

Ejercicio 1



MaTeX

RECTAS Y
PLANOS



Ejercicio 2. Exigimos que los vectores

$$\overrightarrow{AB} = (2 - m, m - 2, 4) \quad \overrightarrow{AC} = (5 - m, 1, 1)$$

sean proporcionales, es decir,

$$\frac{5 - m}{2 - m} = \frac{1}{m - 2} = \frac{1}{4} \implies \begin{cases} \frac{5 - m}{2 - m} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{m - 2} = \frac{1}{4} \end{cases} \implies m = 6$$

La ecuación de la recta AB , será:

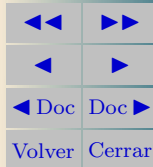
$$r \equiv \frac{x - 6}{-1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 3}{1}$$

Ejercicio 2



MaTEX

RECTAS Y
PLANOS





Ejercicio 3. Para pasar r a paramétricas

$$r \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

elegimos una variable como parámetro, por ejemplo $y = \lambda$, y tenemos:

$$r \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

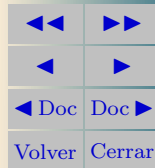
Luego un punto es $(3, 0, -1)$ y su vector $(-1, 1, 1)$, y de aquí en forma continua queda

$$r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

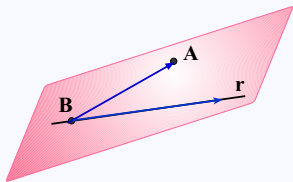
Ejercicio 3

MaTeX

RECTAS Y
PLANOS



Ejercicio 4. El plano buscado contiene a A y a r luego tenemos dos puntos $A(2, 0, 1)$, $B(1, -3, 0) \in r$ del plano y un vector $\vec{u} = (2, 1, -1)$.



Con A y B formamos el otro vector direccional $\vec{AB} = (-1, -3, -1)$. La ecuación del plano será:

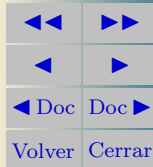
$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - 2 & y - 0 & z - 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv 4(x - 2) - 3y + 5(z - 1) = 0$$

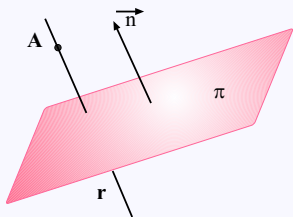
Ejercicio 4



MaTeX

RECTAS Y
PLANOS

Ejercicio 5. La recta r buscada pasa por el punto $A(1,0,0)$, y tendrá como vector \vec{u} el vector normal del plano $\vec{n} = (1, -1, -1)$.

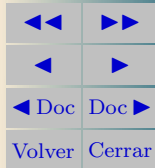


$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$$

Ejercicio 5

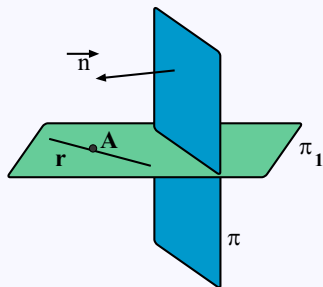


MaTeX

RECTAS Y
PLANOS



Ejercicio 6. Del plano π_1 buscado tenemos:



- el punto $A(1, 1, -1) \in r$
- el vector $\vec{u}(2, -3, -1)$ de r

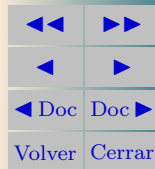
- y el vector \vec{n} de $\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - y + z = 0$:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4x - 3y + z + 8 = 0$$

Ejercicio 6

MaTEX

RECTAS Y
PLANOS





Ejercicio 7.

- a) La expresión de todos los planos que la contienen es el haz de planos

$$\alpha(x - y - 2) + \beta(y - z + 1) = 0 \quad \alpha, \beta \in R$$

- b) El plano del haz pasa por el origen, verifica

$$\alpha(0 - 0 - 2) + \beta(0 - 0 + 1) = 0 \implies \beta = 2\alpha$$

con $\alpha = 1$, se tiene $\beta = 2$ y sustituyendo en la expresión del haz,
 $x + y - 2z = 0$

- c) Hallamos el plano del haz con vector normal proporcional al vector normal de $x - z = 5$. Asociando términos en el haz se tiene

$$\alpha x + (\beta - \alpha)y - \beta z - 2\alpha + \beta = 0$$

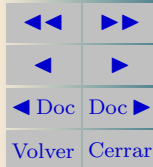
$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta - \alpha}{0} = \frac{-\beta}{-1} \implies \alpha = \beta$$

con $\alpha = 1$, se tiene $\beta = 1$ y sustituyendo en la expresión del haz,
 $x - z = 1$

Ejercicio 7

MaTeX

RECTAS Y
PLANOS



Ejercicio 8.

Sean la recta y el plano:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2} \quad \pi : x + y + mz = n$$

- a) Calcular m y n para que π contenga a r . Es necesario que $\vec{u}(1, -1, 1)$ sea ortogonal a $\vec{n}(1, 1, m)$, luego

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0; (1, -1, 1) \cdot (1, 1, m) = 0 \implies \boxed{m = 0}$$

y que el punto $A(0, 2, 0) \in r$ pertenezca al plano. Luego substituyendo

$$(0) + (2) + m(0) = n \implies \boxed{n = 2}$$

- b) Calcular m y n para que π y r sean paralelos. Del apartado anterior r tiene que ser paralela sin puntos en común con π , luego $\boxed{m = 0 \quad n \neq 2}$.
- c) Calcular m y n para que π y r sean secantes. Del apartado anterior r no tiene que ser paralela, luego $\boxed{m \neq 0}$

Ejercicio 8



MaTeX

RECTAS Y PLANOS



Ejercicio 9. Los planos π_α y π_β determinan una recta siempre que no sean paralelos. Para que sean paralelos se tienen que cumplir:

$$\frac{2}{k} = \frac{-k}{-1} = \frac{-4}{1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{k} = \frac{-k}{-1} \\ \frac{-k}{-1} = \frac{-4}{1} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} k = \pm\sqrt{2} \\ k = -4 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Imposible}$$

luego $\forall k \in R \quad \pi_\alpha \cap \pi_\beta = r(k)$.

Ahora estudiamos la posición relativa de π_α , π_β y π_γ :

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{2 \quad -k \quad -4}^A & & & 2 \\ k & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)}_{AM}$$

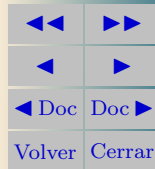
$$\text{Como } \begin{vmatrix} 2 & -k & -4 \\ k & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 5k - 8.$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k = \frac{5 \pm \sqrt{68}}{2}. \text{ Por otra parte como un menor de } AM,$$



MaTEX

RECTAS Y
PLANOS

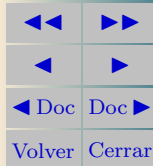


$$\begin{vmatrix} -k & -4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4k + 4 \text{ se anula para } k = 1, \text{ se tiene}$$

$$\bullet k = \frac{5 \pm \sqrt{68}}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} r(A) = 2 \\ r(AM) = 3 \end{array} \Rightarrow r(k) // \pi_\beta$$

$$\bullet k \neq \frac{5 \pm \sqrt{68}}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} r(A) = 3 \\ r(AM) = 3 \end{array} \Rightarrow \pi_\alpha \cap \pi_\beta \cap \pi_\gamma = \{P\}$$

Ejercicio 9

MaTEXRECTAS Y
PLANOS



Ejercicio 10. Obtenemos un punto $A \in r$ y su vector \vec{u}

$$r \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3} \left\{ \begin{array}{l} A(3, -1, 0) \\ \vec{u} = (5, 2, -3) \end{array} \right.$$

Obtenemos un punto $B \in s$ y su vector \vec{v}

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + 3y + 7z - 6 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

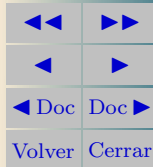
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 4 \\ 3x + 7z = 6 \end{array} \right\} B\left(\frac{11}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right) \\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \vec{v} = (-10, -4, 6) \end{array} \right.$$

Como $\vec{v} = (-10, -4, 6) \sim \vec{u} = (5, 2, -3)$ son proporcionales las rectas r y s son paralelas. Por otra parte como $A(3, -1, 0) \in r$ satisface las ecuaciones de s , entonces $A \in s$, y las rectas r y s son paralelas con un punto en común luego son coincidentes, $r \equiv s$

Ejercicio 10

MaTEX

RECTAS Y
PLANOS





Ejercicio 11. Obtenemos el vector direccional \vec{u} de r :

$$r \equiv 4x = 2y + 6 = z \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{4} \end{array} \right\} \quad \vec{u} = (1, 2, 4)$$

Obtenemos el vector direccional \vec{v} de s :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & a & -1 \\ 2 & 3 & b \end{vmatrix} = \vec{v} = (ab + 3, -2b - 2, 6 - 2a)$$

$$r \parallel s \implies \frac{ab + 3}{1} = \frac{-2b - 2}{2} = \frac{6 - 2a}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{ab + 3}{1} = \frac{6 - 2a}{4} \\ \frac{-2b - 2}{2} = \frac{6 - 2a}{4} \end{cases} \begin{cases} \mathbf{b} = -1/5 \\ \mathbf{a} = -5 \end{cases}$$

Ejercicio 11

MaTeX

RECTAS Y
PLANOS



Ejercicio 12. Para que r y s sean paralelas sus vectores deben ser proporcionales. Como $\vec{u}(5, 3, -1)$ y $\vec{v}(m, 3, n)$,

$$\frac{5}{m} = \frac{3}{3} = \frac{-1}{n} \implies \begin{cases} \frac{5}{m} = \frac{3}{3} \\ \frac{3}{3} = \frac{-1}{n} \end{cases} \implies \begin{cases} m = 5 \\ n = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 12

MaTEXRECTAS Y
PLANOS

Ejercicio 13. De r tenemos el punto $A(0, 1, a)$ y el vector $\vec{u} = (a + 2, 0, 0)$. De la recta s tenemos el punto $B(a, 2, a)$ y el vector $\vec{v} = (-1, a^3, a - 1)$. Para que sean paralelas $\vec{u} \sim \vec{v}$, luego

$$\frac{a + 2}{-1} = \frac{0}{a^3} = \frac{0}{a - 1} \Rightarrow a = -2$$

pero con $a = -2$, el vector $\vec{u} = (0, 0, 0)$ lo cual no puede ser. Luego no pueden ser paralelas. Veamos si pueden ser concurrentes. En este caso el determinante $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}| = 0$,

$$\begin{vmatrix} a + 2 & 0 & 0 \\ -1 & a^3 & a - 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(a + 2)(a - 1) = 0 \Rightarrow a = -2 \vee a = 1$$

Luego si $a = 1$, $r \cap s = \{P\}$. En resumen

$$\begin{cases} a = -2 & r \text{ no esta definida} \\ a = 1 & r \cap s = \{P\} \text{ se cortan en un punto} \\ a \neq -2 \wedge 1 & \text{las rectas se cruzan} \end{cases}$$

Ejercicio 13



MaTeX

RECTAS Y
PLANOS





Ejercicio 14. Discutimos el sistema según los valores de k

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k^2 \\ 1 & 1 & k & k \\ 1 & 1 & 2k & 2 \end{pmatrix}}_{AM} \implies |A| = k(k-1) = 0 \implies k = 0 \vee k = 1$$

Discusión:

- $k = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \stackrel{f_3 - f_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

con $r(A) = 2$ y $r(AM) = 3$. Recta r paralela a π .

- $k = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

con $r(A) = 2$ y $r(AM) = 2$. Recta r contenida en el plano π .

- $k \neq 0 \wedge 1$, $r(A) = 3$ y $r(AM) = 3$. Sistema Compatible Determinado. Se cortan en un punto.

MaTEX

RECTAS Y
PLANOS



Ejercicio 14

Soluciones a los Tests

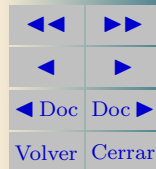
Solución al Test: Como los vectores $\vec{u}(1, 2, 3)$ y $\vec{v}(2, 4, 6)$ son proporcionales no son linealmente independientes. Luego no tenemos dirección para un plano que necesita dos vectores linealmente independientes. En este caso con estos datos tendríamos una recta.

Final del Test



MaTeX

RECTAS Y
PLANOS



Solución al Test: El punto $A(7, -4, 2)$ y la recta

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+1}{3}$$

no determinan un plano pues el punto no es exterior a la recta ya que satisface su ecuación

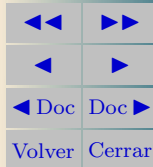
$$\frac{7-2}{5} = \frac{-4+5}{1} = \frac{2+1}{3} = 1$$

Final del Test



MaTEX

RECTAS Y
PLANOS



Índice alfabético

haz de planos, 17

plano, 9

ecuación cartesiana, 10

ecuaciones paramétricas, 10

posición relativa

de dos planos, 14, 15

de dos rectas, 25

de recta y plano, 19

de tres planos, 21

Punto medio, 4

puntos alineados, 8

recta

ecuación, 5

ecuación continua, 6

ecuación paramétrica, 6

ecuación vectorial, 6, 10

ecuaciones cartesianas, 6

sistema de referencia, 3



MaTeX

RECTAS Y
PLANOS

