

Proyecto MaTeX

Límites de Funciones

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

© 2004 javier.gonzalez@unican.es
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

LÍMITES



Tabla de Contenido

1. Introducción
2. Infinitésimos
 - 2.1. Algebra de infinitésimos
 - 2.2. Orden de un infinitésimo
 - 2.3. Infinitésimos equivalentes
 - 2.4. Principio de Sustitución
3. Infinitos
 - 3.1. Orden de un infinito
 - 3.2. Los infinitos: potencial, exponencial y logarítmico
4. Cálculo de límites $f(x)^{g(x)}$
 - 4.1. Casos indeterminados de límites $f(x)^{g(x)}$
5. Regla de L'Hôpital
 - Caso $\frac{\infty}{\infty}$ • Caso $0 \cdot \infty$ • Caso $\infty - \infty$

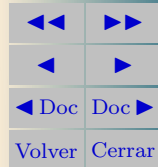
Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests



MaTeX

LÍMITES



1. Introducción

Sería conveniente repasar el capítulo sobre los límites de 1º de bachillerato que puedes encontrar en **Límites de Funciones I**. En este capítulo vas a profundizar en el cálculo de límites con funciones:

- trigonométricas,
- exponenciales y
- logarítmicas

que no se han tratado en el capítulo anterior.

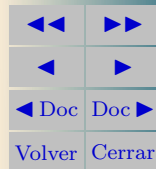
Para ello introduciremos los conceptos de **infinitésimo** e **infinito**. Esto nos permitirá calcular el tipo de límite indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$ que es el más importante y es objeto esencial del *Cálculo diferencial*.

El nivel de este capítulo es adecuado para alumnos de 2º de Bachillerato.



MaTeX

LÍMITES





2. Infinitésimos

Toda variable $f(x)$ se llama **infinitamente pequeña** o **infinitésimo** cuando tiende a 0.

$$f(x) \rightarrow 0$$

La condición esencial es la **variabilidad** y tener por **límite** 0.

No hablamos de números infinitamente pequeños, sería un contrasentido. El número 10^{-2002} es realmente pequeño pero no infinitamente pequeño.

La condición esencial del infinitésimo es que se pueda hacer tan pequeño como queramos, por lo que debe ser una expresión variable.

Decimos que x^2 es infinitésimo en $x = 0$, pues $x^2 \rightarrow 0$ en $x = 0$. Pero decimos que $1 + x^2$ no es infinitésimo, pues $1 + x^2 \rightarrow 1$ en $x = 0$.

También $\sin x$ es infinitésimo en $x = 0$, pues $\sin x \rightarrow 0$ en $x = 0$. Pero decimos que $2 + \sin x$ no es infinitésimo, pues $2 + \sin x \rightarrow 2$ en $x = 0$.

Así mismo, $\sin(1+x)$ no es infinitésimo en $x = 0$, pues $\sin(1+x) \rightarrow \sin 1$ en $x = 0$, pero si lo es en $x = -1$.

Y así sucesivamente.

Ejemplo 2.1. Las siguientes funciones son infinitésimos en los puntos que se indican

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} x - 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} x^2$$

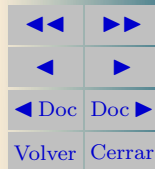
$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \tan x$$

MaTeX

LÍMITES



g) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x)$

2.1. Algebra de infinitésimos

Regla I La suma finita de infinitésimos es un infinitésimo.

$$\alpha(x) \rightarrow 0 \quad \beta(x) \rightarrow 0 \implies \alpha(x) + \beta(x) \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + \sin x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^4 + \sin x^2 = 0$$

Regla II EL producto de un infinitésimo por una constante, o por una variable acotada, es un infinitésimo.

$$k \in \mathbb{R}, \alpha(x) \rightarrow 0 \implies K\alpha(x) \rightarrow 0$$

$$z(x) \text{ acotada}, \alpha(x) \rightarrow 0 \implies z(x)\alpha(x) \rightarrow 0$$

2.2. Orden de un infinitésimo

Cuando $x \rightarrow 0$ las variables:

$$x, x^2, x^3, \dots, x^m, \dots$$

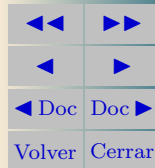
son infinitésimos y éstas se toman como tipos de **comparación** de otros infinitésimos. Decimos que $f(x)$ es un infinitésimo en el punto $x = a$ de orden n cuando

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = Cte \neq 0$$



MaTEX

LÍMITES





2.3. Infinitésimos equivalentes

Dos infinitésimos se dicen **equivalentes** ($\alpha \sim \beta$) cuando el límite de su cociente es 1. Si $\alpha \rightarrow 0$ y $\beta \rightarrow 0$ son infinitésimos.

$$\alpha \sim \beta \iff \lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$$

Teorema 2.1. Los infinitésimos $x \sim \text{sen } x \sim \tan x$ son equivalentes en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad (1)$$

Para su aplicación se puede sustituir x por cualquier variable $\alpha(x)$ que también sea un infinitésimo. Estos son algunos ejemplos:

Ejemplo 2.2. Las siguientes infinitésimos equivalentes en los puntos que se indican

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{2x} = 1 & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x}{5x} = 1 & c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x^2}{3x^2} = 1 \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 6x}{6x} = 1 & e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(-x^3)}{-x^3} = 1 & f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)}{x-1} = 1 \end{array}$$

MaTeX

LÍMITES





Ejercicio 1. Escribir el infinitésimo equivalente en $x = 0$ a:

a) $\sin x^3$

b) $\tan(x + x^2)$

c) $\sin 17x^3$

Teorema 2.2. Los infinitésimos $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ son equivalentes en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1 \quad (2)$$

Para su aplicación se puede sustituir \mathbf{x} por cualquier variable $\alpha(\mathbf{x})$ que también sea un infinitésimo. Ejemplos de esto son:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\frac{1}{2}4x^2} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x^2}{\frac{1}{2}25x^4} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\frac{1}{2}x} = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\frac{1}{2}4x^2} = 1$

Ejercicio 2. Escribir el infinitésimo equivalente en $x = 0$ a:

a) $1 - \cos x^2$

b) $1 - \cos 3$

c) $1 - \cos \frac{x}{2}$

d) $1 - \cos \sqrt{x^3}$

e) $1 - \cos 3x^7$

f) $1 - \cos(\sin x)$

MaTeX

LÍMITES



Teorema 2.3. Cuando $x \rightarrow 0$, $\ln(1+x) \sim x$ son equivalentes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (3)$$

Para su aplicación se puede sustituir x por cualquier variable $\alpha(x)$ que también sea un infinitésimo. Ejemplos de esto son:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{-x} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5\sqrt{x})}{5\sqrt{x}} = 1$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = 1$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\tan x)}{\tan x} = 1$$

Ejercicio 3. Escribir el infinitésimo equivalente en $x = 0$ a:

$$a) \ln(1 + \sqrt{x^3})$$

$$b) \ln(1 + 3x^7)$$

$$c) \ln(1 + \sin x)$$

$$d) \ln(1 - 3x)$$

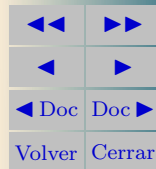
$$e) \ln(1 + \frac{x}{3})$$

$$f) \ln(1 + 2 \tan x)$$



MaTeX

LÍMITES



Teorema 2.4. Cuando $x \rightarrow 0$, $e^x - 1 \sim x$ son equivalentes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (4)$$

Para su aplicación se puede sustituir x por cualquier variable $\alpha(x)$ que también sea un infinitésimo. Ejemplos de esto son:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = 1$$

Ejercicio 4. Escribir el infinitésimo equivalente en $x = 0$ a:

$$a) e^{2x^3} - 1$$

$$b) e^{\sin x} - 1$$

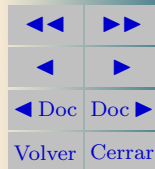
$$c) e^{\tan x^2} - 1$$

Recogemos en una tabla las **equivalencias** de infinitésimos que hemos visto añadiendo las inversa del seno y la tangente. Es conveniente aprenderlas para facilitar el cálculo de límites con infinitésimos.



MaTeX

LÍMITES

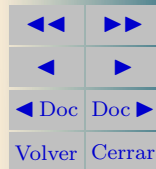


Equivalencias	
$\operatorname{sen} \alpha(x)$	$\sim \alpha(x)$
$1 - \cos \alpha(x)$	$\sim \frac{1}{2}\alpha(x)^2$
$\tan \alpha(x)$	$\sim \alpha(x)$
$\ln(1 + \alpha(x))$	$\sim \alpha(x)$
$e^{\alpha(x)} - 1$	$\sim \alpha(x)$
$\operatorname{arc} \operatorname{sen} \alpha(x)$	$\sim \alpha(x)$
$\operatorname{arctan} \alpha(x)$	$\sim \alpha(x)$

Tabla de Infinitésimos

MaTEX

LÍMITES





MaTEX

LÍMITES

Responde a las siguientes cuestiones sobre infinitésimos:

Test. Responde a las siguientes preguntas.

1. La función $f(x) = (x - 1)^2$ es un infinitésimo en:

- (a) $x = 0$ (b) Nunca (c) $x = 1$

2. La función $f(x) = (x - a)^2$ es un infinitésimo en:

- (a) $x = 0$ (b) Nunca (c) $x = a$

3. La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es un infinitésimo en:

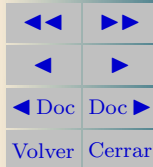
- (a) $x = 0$ (b) ∞ (c) Nunca

4. La función $f(x) = 1 + x^2$ es un infinitésimo en:

- (a) $x = 0$ (b) Nunca (c) $x = 1$

5. La función $f(x) = \ln x$ es un infinitésimo en:

- (a) $x = 0$ (b) Nunca (c) $x = 1$





Test. Responde a las siguientes preguntas.

1. La función $f(x) = \ln(x - 1)$ es un infinitésimo en:

- (a) $x = 0$ (b) Nunca (c) $x = 2$ (d) $x = 1$

2. La función $f(x) = e^x - 1$ es un infinitésimo en:

- (a) $x = 0$ (b) Nunca (c) $x = 1$

3. El orden del infinitésimo $5 \cdot x^3$ en $x = 0$, es:

- (a) 3 (b) 2 (c) 5

4. El orden del infinitésimo $4 \cdot \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$, es:

- (a) 3 (b) $1/3$ (c) 1 (d) 4

5. El orden del infinitésimo $4 \cdot \sqrt[5]{x^2}$ en $x = 0$, es:

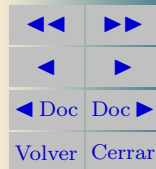
- (a) 5 (b) 2 (c) $2/5$ (d) 4

6. El orden del infinitésimo $x^2 - 1$ en $x = 1$, es:

- (a) 0 (b) 2 (c) 1 (d) Ninguno

MaTeX

LÍMITES





Inicio del Test Buscar el infinitésimo equivalente en cada caso:

1. En $x = 0$, $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ equivale a:

- (a) x (b) x^2 (c) Ninguno de los otros

2. En $x = 0$, $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ equivale a:

- (a) x (b) x^2 (c) Ninguno de los otros

3. En $x = 0$, $f(x) = 1 - \cos 4x$ equivale a:

- (a) $8x^2$ (b) $4x^2$ (c) $4x$ (d) Ninguno de los otros

4. En $x = 0$, $f(x) = 1 - \cos \sqrt{x}$ equivale a:

- (a) \sqrt{x} (b) $\frac{1}{2}x$ (c) Ninguno

Final del Test

MaTEX

LÍMITES





Inicio del Test Buscar el infinitésimo equivalente en cada caso:

1. En $x = 0$, $\ln(1 + x^2)$ equivale a:

(a) x (b) x^2 (c) $1 + x^2$

2. En $x = 0$, $\ln(1 - 3x^2)$ equivale a:

(a) x^2 (b) $-x^2$ (c) $-3x^2$

3. En $x = 0$, $\ln(1 + \sqrt{x^3})$ equivale a:

(a) $\sqrt{x^3}$ (b) x^3 (c) $1 + x^3$

4. En $x = 0$, $\ln(1 + \operatorname{sen} x)$ equivale a:

(a) x (b) $\tan x$ (c) $\operatorname{sen} x$ (d) Todos los anteriores

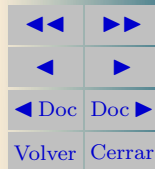
5. En $x = 1$, $\ln(x)$ equivale a:

(a) $x - 1$ (b) x (c) x^2 (d) Ninguno

Final del Test

MaTeX

LÍMITES





Inicio del Test Buscar el infinitésimo equivalente en cada caso:

1. En $x = 0$, $e^{x^2} - 1$ equivale a:

(a) x (b) x^2 (c) $1 + x^2$

2. En $x = 0$, $\ln(\cos x)$ equivale a:

(a) $x - 1$ (b) $\cos x$ (c) $\cos x - 1$

3. En $x = 0$, $e^{\sqrt{x}} - 1$ equivale a:

(a) \sqrt{x} (b) x (c) $\sqrt{x} - 1$

4. En $x = 0$, $e^{\text{sen}x^2} - 1$ equivale a:

(a) $x^2 - 1$ (b) $\text{sen}x$ (c) x^2

5. En $x = 1$, $\ln(e^x)$ equivale a:

(a) $e^x - 1$ (b) x (c) $\text{sen}x$ (d) Todas ellas

Final del Test

MaTeX

LÍMITES



Ejercicio 5. Aplicar equivalencias a los siguientes infinitésimos en el punto indicado

a) $(\operatorname{sen} 5x)_{x=0}$

b) $[\tan(1-x)]_{x=1}$

c) $[1 - \cos x^2]_{x=0}$

d) $[\arcsin 3x]_{x=0}$

e) $[\ln x]_{x=1}$

f) $[\arctan \operatorname{sen} x]_{x=0}$

g) $[e^{\operatorname{sen} x} - 1]_{x=0}$

h) $[\ln(\cos x)]_{x=0}$

i) $[\operatorname{sen} 3\sqrt{x}]_{x=0}$

Ejercicio 6. Determinar el orden de los siguientes infinitésimos en $x = 0$

a) $\operatorname{sen} x$

b) $\tan x$

c) $1 - \cos x$

d) $4x^3 + x^{50}$

e) $\ln(1-x)$

f) $e^x - 1$

g) $e^{3x^2} - 1$

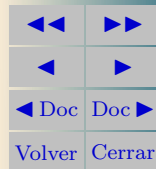
h) $\ln(1-x^3)$

i) $\operatorname{sen} 3x^2$



MaTeX

LÍMITES





2.4. Principio de Sustitución

A la hora de aplicar equivalencias de infinitésimos en los límites hay que tener en cuenta que la sustitución no se puede hacer literalmente. Para hacerlo hay que limitarse al siguiente principio:

[P.S.] Si en una expresión de un límite se sustituye un **factor** o **divisor** por otro equivalente, el límite de la expresión no varía si se sustituye

- Un factor finito por su límite, no nulo
- Un factor infinitésimo por otro equivalente

Téngase presente este principio de sustitución para los infinitésimos que estén multiplicando o bien dividiendo. Si la sustitución se realiza cuando están sumando o restando es fácil cometer errores.

Ejemplo 2.3. Aplicar el **principio de sustitución** a los límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cdot \sin 5x$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cdot \sin 5x = \lim_{x \rightarrow 0} (2x) \cdot (5x) = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

□

MaTeX

LÍMITES



► **Aviso** Tener mucho cuidado en no sustituir un **infinitésimo** que esté **sumando** por otro equivalente, los resultados pueden ser absurdos.

Por ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x} = 0 \quad \text{falso}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0 \quad \text{falso}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - (\operatorname{sen} x + 2x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x + 2x^3)}{x^3} = -2 \quad \text{falso}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot \operatorname{sen} x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^2}{x^3} = 1 \quad \text{correcto}$$

Ejercicio 7. Aplicar equivalencias al cálculo de los siguientes límites:

a) $\frac{3 \operatorname{sen} 2x}{4x}$

b) $\frac{1 - \cos 4x}{5x^2}$

c) $\frac{\operatorname{sen} x \cdot \tan x}{1 - \cos x}$

d) $\frac{\ln x}{2 - 2x}$

e) $\frac{\ln(1+x)}{1 - e^x}$

f) $\frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{\ln(\cos x)}$

g) $\frac{\ln(1+5x)}{1 - e^{3x}}$

h) $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos 2x}$

i) $\frac{5x \operatorname{sen} 2x}{4x^2}$



MaTeX

LÍMITES





3. Infinitos

Toda variable $f(x)$ se llama **infinitamente grande** o **infinita** para $x = a$ cuando tiende a ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow \infty$$

Ejemplo 3.1. Las siguientes funciones son infinitos:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} & b) \lim_{x \rightarrow \infty} x & c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \\ d) \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 & e) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x & f) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \end{array}$$

Ejercicio 8. Indicar si las siguientes funciones son infinitos:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x}{1-x} & b) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x & c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \\ d) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x & e) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \end{array}$$

3.1. Orden de un infinito

Cuando $x \rightarrow \infty$ las variables:

$$x, x^2, x^3, \dots, x^m, \dots$$

son infinitos y éstas se toman como tipos de **comparación** de otros infinitos. En la comparación caben cuatro casos:

$$f(x) \rightarrow \infty \quad g(x) \rightarrow \infty$$

MaTeX

LÍMITES





MaTEX

- Si $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ Se dice $f(x)$ es de **orden superior** a $g(x)$
- Si $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $f(x)$ es de **orden inferior** a $g(x)$
- Si $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \text{finito} \neq 0$ son del **mismo orden**
- Si $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \text{no existe}$, no son comparables

Ejemplo 3.2. Veamos el orden de algunos infinitos:

a) El polinomio $3x + 5$ es un infinito de orden 1, pues

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{x} = 3$$

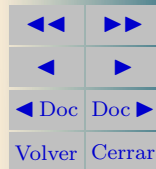
b) El polinomio $-x^3 + 5x$ es un infinito de orden 3, pues

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 5x}{x^3} = -1$$

c) El polinomio $\sqrt{4x + 5}$ es un infinito de orden 1/2, pues

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x + 5}}{\sqrt{x}} = 2$$

LÍMITES



d) En general, el polinomio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ es un infinito de orden n , pues

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^n} = a_n$$

3.2. Los infinitos: potencial, exponencial y logarítmico

Cuando $x \rightarrow +\infty$ las funciones :

$$\mathbf{x^n} (n > 0) \quad \mathbf{a^x} (a > 1), \quad \mathbf{\log_b x} (b > 1)$$

son infinitos pero de distinto orden.

Cuando $x \rightarrow +\infty$, la exponencial a^x con ($a > 1$) es un infinito de orden superior a la potencial, x^n con ($n > 0$), cualquiera que sea n . Lo escribiremos con la expresión

$$\mathbf{a^x} \gg \mathbf{x^n} \tag{5}$$

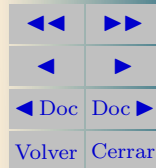
Cuando $x \rightarrow +\infty$, la potencial x^n con ($n > 0$), es un infinito de orden superior al logaritmo de x , $\log_b x$ para cualquier base ($b > 1$). Lo escribimos con la expresión

$$\mathbf{x^n} \gg \mathbf{\log_b x} \tag{6}$$



MaTEX

LÍMITES



► **Aviso** La comparación del crecimiento potencial exponencial puede sorprender. Si construimos una tabla para las funciones $1,001^x$ con x^4 .

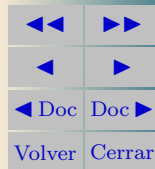
Comparación de $1,001^x$ con x^4			
x	$1,001^x$	x^4	$\frac{1,001^x}{x^4}$
1	1.001	1	1.001
100	1,11E+00	1,00E+08	1,11E-08
5000	1,48E+02	6,25E+14	2,37E-13
30000	1,05E+13	8,10E+17	1,30E-05
47000	2,52E+20	4,87E+18	5,17E+01
100000	2,55E+43	1,00E+20	2,56E+23

vemos como $1,001^x$ llega a superar a x^4 , y el cociente se hace tan grande como queramos.



MaTeX

LÍMITES



Ejemplo 3.3. Con la comparación de infinitos podemos hacer de forma inmediata algunos límites :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{4x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \infty \quad \triangleleft e^{3x} \gg x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{4x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \infty \quad \triangleleft e^{3x} \gg x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0 \quad \triangleleft e^x \gg x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^8 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8}{e^x} = 0 \quad \triangleleft e^x \gg x^8$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty \quad \triangleleft x \gg \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{15} + 2x^7}{2^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0 \quad \triangleleft 2^x \gg x^{15}$$

Ejercicio 9. Usar la comparación de infinitos para hallar los límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^6)}{x^2}$$

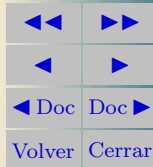
$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^{-x}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^3 e^{-x}$$



MaTeX

LÍMITES





Inicio del Test Cuando $x \rightarrow +\infty$, comparar el orden de los infinitos:

1. Indica el infinito de mayor orden:

(a) x^2 (b) x^3 (c) x (d) $x^{2,56}$

2. Indica el infinito de mayor orden:

(a) x^3 (b) $x(1 + 4x)$ (c) $\ln x^4$

3. Indica el infinito de mayor orden:

(a) x^{22} (b) $\ln x^{100}$ (c) e^x

4. Indica el infinito de mayor orden:

(a) 4^x (b) 2^x (c) e^x

5. Indica el infinito de mayor orden:

(a) x^3 (b) $x^{2,75}$ (c) $x^{2,99}$

6. El límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1,002}}{\ln x}$ es

(a) $+\infty$ (b) 0 (c) 1

Final del Test

MaTeX

LÍMITES



Ejemplo 3.4. Aplicamos cuando sea necesario los anteriores resultados para el cálculo de los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^6)}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0 \quad \triangleleft x^6 \gg \ln(1+x^6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{e^{-x}} = \frac{+\infty}{0} = +\infty \quad \triangleleft$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln x^3 = 0 \cdot \infty = 0 \quad \triangleleft e^x \gg \ln(x^3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1,002}}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty \quad \triangleleft x^{1,002} \gg \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 \cdot (-\infty) = 0 \quad \triangleleft x^2 \gg \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{54}}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0 \quad \triangleleft e^x \gg x^{54}$$

Test. El límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{200}}{e^x}$ es

(a) $+\infty$

(b) 0

(c) 1



MaTEX

LÍMITES





4. Cálculo de límites $f(x)^{g(x)}$

Si no hay problemas de indeterminación, el cálculo de dichos límites se realiza por paso al límite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Ejemplo 4.1.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x} \right)^x = (2)^{+\infty} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{3x} \right)^x = \left(\frac{2}{3} \right)^{+\infty} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{3x} \right)^{-2x} = \left(\frac{2}{3} \right)^{-\infty} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{3x-1} \right)^{-x} = \left(\frac{5}{3} \right)^{-\infty} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{8x-1} \right)^{-x} = \left(\frac{5}{8} \right)^{-\infty} = +\infty$

MaTeX

LÍMITES





4.1. Casos indeterminados de límites $f(x)^{g(x)}$

Teniendo en cuenta que toda potencia se puede escribir como una potencia de base el número e , ya que $a^b = e^{b \ln a}$, podemos escribir

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

Y de esta forma expresar el límite

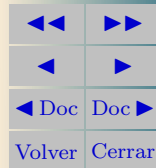
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)} \quad (7)$$

De esta forma sabremos cuando tenemos casos indeterminados

Casos Indeterminados				
$(0)^0$	$e^{0 \ln 0}$	$e^{0(-\infty)}$	$e^?$	Indeterminado
$(0)^{+\infty}$	$e^{+\infty \ln 0}$	$e^{+\infty(-\infty)}$	$e^{-\infty}$	0
$(0)^{-\infty}$	$e^{-\infty \ln 0}$	$e^{-\infty(-\infty)}$	$e^{+\infty}$	$+\infty$
$(\infty)^0$	$e^{0 \ln \infty}$	$e^{0(\infty)}$	$e^?$	Indeterminado

MaTeX

LÍMITES



Ejemplo 4.2. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x} = 0^{+\infty} \quad \text{de la ecuación 7}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}} = e^{-\infty/0^+} = e^{-\infty} = \mathbf{0}$$

□

Ejemplo 4.3. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = 0^{-\infty} \quad \text{de la ecuación 7}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \ln x} = e^{-\infty(-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$$

□

Ejemplo 4.4. Hallar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x}$

Solución:

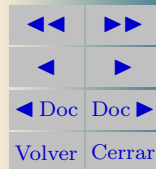
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x} = 0^{+\infty} = \mathbf{0}$$

□



MaTEX

LÍMITES





Inicio del Test Por la comparación de infinitos, determinar los límites:

1. El $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^3)$ es:

- (a) 0 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

2. El $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 5x^6)$ es:

- (a) 0 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

3. El $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^{30})$ es:

- (a) 0 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

4. El $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{2^x}$ es:

- (a) 0 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

5. El límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{0,002} \ln x^{40}$ es

- (a) $+\infty$ (b) 0 (c) 1

Final del Test

MaTeX

LÍMITES





Inicio del Test Determinar de forma directa los límites:

1. El $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$ es:

- (a) 0 (b) $-\infty$ (c) $-\infty$ (d) 1

2. El $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ es:

- (a) 0 (b) ∞ (c) No existe (d) 1

3. El $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ es:

- (a) 1 (b) 0 (c) ∞ (d) \nexists

4. El $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ es:

- (a) 1 (b) 0 (c) ∞ (d) \nexists

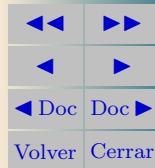
5. El límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{200}}{e^x}$ es

- (a) $+\infty$ (b) 0 (c) 1

Final del Test

MaTeX

LÍMITES





Ejercicio 10. Indicar si las siguientes funciones son infinitas:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{sen} 2x}{4x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \tan x}{1 - \cos x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2 - 2x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{1 - e^x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{\ln \cos x}$$

Ejercicio 11. Usa infinitésimos equivalentes, cuando sea posible, para hallar:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen} x^2}{\ln(1 - x^2)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(\tan x)}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \tan x}{x \operatorname{sen} x}$$

Ejercicio 12. Usa infinitésimos equivalentes, cuando sea posible, para hallar:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \operatorname{sen}(x - 1)}{1 - \cos(x - 1)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \operatorname{sen}(x^2 + x)}{3x \cdot \operatorname{sen} x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 3x}{x \operatorname{sen}^3 2x}$$

MaTeX

LÍMITES





Ejercicio 13. Usa el orden de infinitos, cuando sea posible, para hallar:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2^x$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2^x$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4^x - 2^x$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^x - 2^x$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^5 - x^2$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \ln x$

Ejercicio 14. Resolver por la técnica del número e cuando sea necesario:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 2x}{2x}\right)^x$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 2x}{x}\right)^x$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 2x}{5x}\right)^x$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + x}{2 + x}\right)^{5x}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - x}{2 - x}\right)^x$

Ejercicio 15. Hallar:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 2}{3x - 1}\right)^x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^{\sin x}$

Ejercicio 16. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{1/x}$

Ejercicio 17. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg x}$

MaTeX

LÍMITES





5. Regla de L'Hôpital

En este apartado se explica un método para el cálculo de límites con ayuda de la derivada. Por ello es conveniente que lo realices cuando hayas estudiado el capítulo de derivadas

Teorema 5.1. (Regla de L'Hôpital)

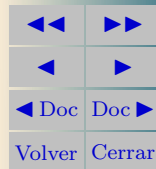
Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en el intervalo (a, b) y tal que $g'(x)$ no se anula en (a, b) .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \\ \text{y } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \\ \text{y } \exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \end{array} \right\} \implies \exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Si no existe $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ no podemos afirmar nada sobre $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$

MaTeX

LÍMITES



Ejemplo 5.1. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{sen} 2x}{4x}$ con la regla de L'Hôpital

Solución: Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{sen} 2x}{4x} = \frac{0}{0} \stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cos 2x}{4} = \frac{6}{4}$$

Ejemplo 5.2. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ con la regla de L'Hôpital

Solución: Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} &= \frac{0}{0} \\ &\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} 2x}{2x} = \frac{0}{0} \\ &\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 2x}{2} = 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \operatorname{sen} x}$ con la regla de L'Hôpital

Solución: Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} \stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$



MaTeX

LÍMITES



• **Caso** $\frac{\infty}{\infty}$

Cuando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, en los límites de la forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

también podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 5.4. Hallar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$ con la regla de L'Hôpital

Solución: Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{e^x} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} &= \frac{6}{\infty} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

□



MaTEX

LÍMITES





- **Caso $0 \cdot \infty$**

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital, pasando a uno de los casos anteriores, dividiendo por el inverso de uno de los factores de la siguiente forma

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

Ejemplo 5.5. Hallar $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \cdot \ln x$ con la regla de L'Hôpital

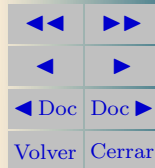
Solución: Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \cdot \ln x &= 0 \cdot \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \frac{\infty}{\infty} \\ &\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-2x^{-3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} -\frac{1}{2}x^2 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

□

MaTeX

LÍMITES



• **Caso** $\infty - \infty$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital, pasando a uno de los casos anteriores de la siguiente forma

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{g(x) - f(x)}{f(x)g(x)}} = \frac{0}{0}$$

Ejemplo 5.6. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ con la regla de L'Hôpital

Solución: Como

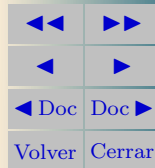
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} &= \boxed{\infty - \infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} = \frac{0}{0} \\ &\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \frac{0}{0} \\ &\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0 \end{aligned}$$

□



MaTeX

LÍMITES



Ejemplo 5.7. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ con la regla de L'Hôpital

Solución: Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} &= \boxed{\infty - \infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x \cdot \ln(1+x)} = \frac{0}{0} \\ &\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{(1+x) \cdot \ln(1+x) + x} = \frac{0}{0} \\ &\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\ln(1+x) + 1 + 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 18.

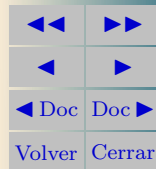
a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^2}{1 - \cos x}$



MaTEX

LÍMITES



EJERCICIO 19. Hallar los siguientes límites con la regla de L'Hôpital.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{5x}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{sen} x - e^x}{(\arctan x)^2}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\tan x - \operatorname{sen} x}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$$

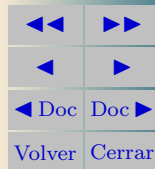
$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$$



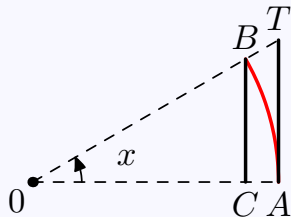
MaTeX

LÍMITES



Soluciones a los Ejercicios

Prueba del Teorema 2.1. Cuando $x \rightarrow 0$, x y $\text{sen } x$ son equivalentes. Obsérvese la figura de radio 1



$$\overline{CB} < \widehat{AB} < \overline{AT}$$

$$\text{sen } x < x < \tan x$$

Dividiendo por $\text{sen } x$

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen } x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen } x} = 1$$

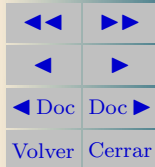
Por otra parte,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$



MaTeX

LÍMITES



Ejercicio 1. Los infinitésimos equivalentes en $x = 0$ son:

a) $\sin x^3 \sim x^3$

b) $\tan(x + x^2) \sim x$

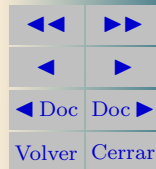
c) $\sin 17x^3 \sim 17x^3$



Ejercicio 1

MaTEX

LÍMITES



Prueba del Teorema 2.2. Equivalencia de $\frac{1}{2}x^2 \sim 1 - \cos x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\frac{1}{2}x^2(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x)}{\frac{1}{2}x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{\frac{1}{2}x^2(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + \cos x} = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen} x}{x} \right)^2}_1 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + \cos x}}_1 = 1 \end{aligned}$$



MaTeX

LÍMITES



Ejercicio 2. Los infinitésimos equivalentes en $x = 0$ son:

$$a) 1 - \cos x^2 \sim \frac{1}{2}x^4$$

$$b) 1 - \cos 3x \sim \frac{1}{2}9x^2$$

$$c) 1 - \cos \frac{x}{2} \sim \frac{1}{8}x^2$$

$$d) 1 - \cos \sqrt{x^3} \sim \frac{1}{2}x^3$$

$$e) 1 - \cos 3x^7 \sim \frac{9}{2}x^{14}$$

$$f) 1 - \cos(\sin x) \sim \frac{1}{2}x^2$$



MaTEX

Ejercicio 2

LÍMITES



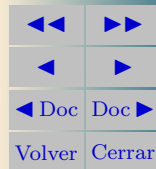
Prueba del Teorema 2.3. Equivalencia de $\ln(1+x) \sim x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1 \end{aligned}$$



◀ *MaTeX*

LÍMITES



Ejercicio 3. Los infinitésimos equivalentes en $x = 0$ son:

$$a) \ln(1 + \sqrt{x^3}) \sim \sqrt{x^3}$$

$$b) \ln(1 + 3x^7) \sim 3x^7$$

$$c) \ln(1 + \operatorname{sen} x) \sim \operatorname{sen} x \sim x$$

$$d) \ln(3x) \sim -3x$$

$$e) \ln\left(1 + \frac{x}{3}\right) \sim \frac{x}{3}$$

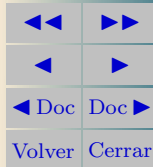
$$f) \ln(1 + 2 \tan x) \sim 2 \tan x \sim 2x$$



MaTEX

Ejercicio 3

LÍMITES



Prueba del Teorema 2.4. Equivalencia de $e^x - 1 \sim x$

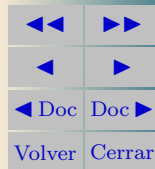
Como

$$\begin{aligned} \ln(1+x) \sim x &\implies e^{\ln(1+x)} \sim e^x \implies \\ &\implies 1+x \sim e^x \implies e^x - 1 \sim x \implies \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{aligned}$$



 MaTEX

LÍMITES



Ejercicio 4. Los infinitésimos equivalentes en $x = 0$ son:

$$a) e^{2x^3} - 1 \sim 2x^3$$

$$b) e^{\operatorname{sen} x} - 1 \sim x$$

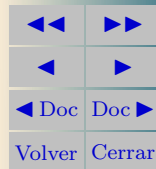
$$c) e^{\tan x^2} - 1 \sim x^2$$



Ejercicio 4

MaTEX

LÍMITES





Ejercicio 5. Escribir el infinitésimo equivalente en $x = 0$ a:

$$(\sin 5x)_{x=0} \sim 5x$$

$$[\tan(1 - x)]_{x=1} \sim 1 - x$$

$$[1 - \cos x^2]_{x=0} \sim \frac{1}{2}x^4$$

$$[\arcsin 3x]_{x=0} \sim 3x$$

$$[\ln x]_{x=1} \sim x - 1$$

$$[\arctan \sin x]_{x=0} \sim x$$

$$[e^{\sin x} - 1]_{x=0} \sim x$$

$$[\ln(\cos x)]_{x=0} \sim \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$

$$[\sin 3\sqrt{x}]_{x=0} \sim 3\sqrt{x}$$

MaTeX

LÍMITES

Ejercicio 5



Ejercicio 6. Escribir el infinitésimo equivalente en $x = 0$ a:

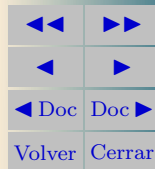
Infinitésimo	de	orden
$\operatorname{sen} x$	$\sim x$	1
$\tan x$	$\sim x$	1
$1 - \cos x$	$\sim \frac{1}{2}x^2$	2
$4x^3 + x^{50}$	$\sim 4x^3$	3
$\ln(1 - x)$	$\sim -x$	1
$e^x - 1$	$\sim x$	1
$e^{3x^2} - 1$	$\sim 3x^2$	2
$\ln(1 - x^3)$	$\sim -x^3$	3
$\operatorname{sen} 3x^2$	$\sim 3x^2$	2

Ejercicio 6



MaTeX

LÍMITES





Ejercicio 7. Aplicar equivalencias al cálculo de los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{sen} 2x}{4x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot 2x}{4x} = \frac{3}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{5x^2} = \frac{8}{5}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \tan x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2 - 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{2 - 2x} = -\frac{1}{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{1 - e^x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-x} = -1$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{\ln(\cos x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -2$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{1 - e^{3x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{-3x} = -\frac{5}{3}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \operatorname{sen} 2x}{4x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2}{4x^2} = \frac{5}{2}$$

MaTeX

LÍMITES



Ejercicio 7

Ejercicio 8.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x}{1-x} = \infty$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \infty$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$

e)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$$

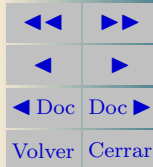
f)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty$$

*MaTeX*

LÍMITES

Ejercicio 8



**Ejercicio 9.**

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^6)}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$$

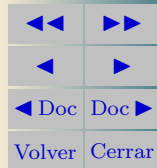
c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^{30} 2^{-x} = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{30}}{2^x} = 0$$

Ejercicio 9

MaTeX

LÍMITES





Ejercicio 10.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{sen} 2x}{4x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot 2x}{4x} = \frac{3}{2}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} 16x^2}{5x^2} = \frac{8}{5}$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \tan x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2 - 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{2(1 - x)} = -\frac{1}{2}$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{1 - e^x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-x} = -1$$

$$f) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{\ln \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{-\frac{1}{2}x^2} = -2$$

Ejercicio 10

MaTeX

LÍMITES





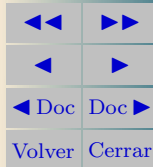
Ejercicio 11.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x^2}{\ln(1 - x^2)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-x^2} = -1$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sen(\tan x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sen x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{0} = \infty$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x \tan x}{x \sen x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x \cdot x} = 1$

Ejercicio 11

MaTeX

LÍMITES





Ejercicio 12.

$$\begin{aligned}
 a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} &= \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \frac{1}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/2} = +\infty
 \end{aligned}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \operatorname{sen}(x-1)}{1 - \cos(x-1)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x-1)}{\frac{1}{2}(x-1)^2} = 2$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x^2 + x)}{3x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + 2x)}{3x \cdot x} = \frac{2}{3}$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 3x}{x \operatorname{sen}^3 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot 9x^2}{x \cdot 8x^3} = \frac{9}{8}$$

Ejercicio 12

MaTeX

LÍMITES



**Ejercicio 13.**

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2^x = +\infty + \infty = +\infty$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2^x = +\infty + 0 = +\infty$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 4^x - 2^x = +\infty - \infty = - + \infty \quad (4^x \ggg 2^x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4^x \left(1 - \left(\frac{2}{4}\right)^x \right) = \infty(1 - 0) = \infty$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 4^x - 2^x = 0 - 0 = 0$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^5 - x^2 = +\infty - \infty = -\infty \quad (x^n \ggg \ln x)$$

$$f) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \ln x = +\infty - \infty = \infty \quad (e^x \ggg \ln x)$$

MaTeX

LÍMITES

Ejercicio 13





Ejercicio 14.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x\left(1 + \frac{1}{x} - 1\right)} = \boxed{e}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+2x}{2x}\right)^x = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x\left(\frac{1+2x}{2x} - 1\right)} = \boxed{\sqrt{e}}$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+2x}{x}\right)^x = 2^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+2x}{5x}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^{+\infty} = \boxed{0}$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{5x} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} 5x\left(\frac{1+x}{2+x} - 1\right)} = \boxed{e^{-5}}$$

$$f) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x}{2-x}\right)^x = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x\left(\frac{1-x}{2-x} - 1\right)} = \boxed{e}$$

Ejercicio 14

MaTEX

LÍMITES



**Ejercicio 15.**

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^x = 1^\infty &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{3x+2}{3x-1} - 1 \right)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{3x-1}} = \boxed{e} \end{aligned}$$

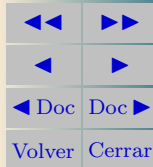
b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^{\sin x} = 0^0 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = (x \gg \ln x) \\ &= e^0 = \boxed{1} \end{aligned}$$

Ejercicio 15

MaTeX

LÍMITES



Ejercicio 16.

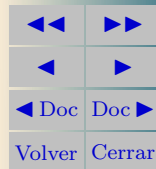
$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{1/x} &= 1^\infty && \triangleleft (7) \\
 &= e^{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (\cos x - 1) && \triangleleft 1 - \cos \alpha \sim \frac{1}{2} \alpha^2 \\
 &= e^{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x} && \triangleleft (\text{simplificando}) \\
 &= e^{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}x \\
 &= e^0 = \boxed{1}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 16



MaTeX

LÍMITES



Ejercicio 17.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} &= \infty^0 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln \frac{1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\tan x \cdot \ln x \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \cdot \ln x \\
 &= e^0 = \boxed{1}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 17

MaTEX

LÍMITES



**Ejercicio 18.**

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 1)^2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - 1)}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos x} = 2$$

Ejercicio 18

MaTeX

LÍMITES



Ejercicio 19(a) Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{5x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$
$$\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{5} = \frac{1}{5}$$



□

MaTeX

LÍMITES



Ejercicio 19(b) Como

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x - 1)}{(\ln x)^2} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x - 1)}{2 \frac{\ln x}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \operatorname{sen}(x - 1)}{2 \ln x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x - 1) + x \cos(x - 1)}{2/x} = \frac{1}{2}$$

□



MaTeX

LÍMITES



Ejercicio 19(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + \operatorname{sen} x}{2 \cos x - x \operatorname{sen} x} = -\frac{1}{2}$$

□

MaTEX

LÍMITES



Ejercicio 19(d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{sen} x - e^x}{(\arctan x)^2} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x}{2 \arctan x \frac{1}{1+x^2}} = \frac{0}{0}$$

$$\left(\longrightarrow\right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x}{2 \arctan x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x - e^x}{\frac{2}{1+x^2}} = -\frac{1}{2}$$

□



MaTeX

LÍMITES



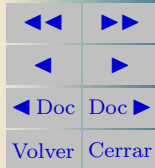
Ejercicio 19(e)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} &= \boxed{\infty - \infty} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x \tan x} = \frac{0}{0} \\
 &\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + \tan^2 x)}{\tan x + x(1 + \tan^2 x)} = \frac{0}{0} \\
 &\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{2(1 + \tan^2 x) + x 2 \tan x (1 + \tan^2 x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{1 + x \tan x} = 0
 \end{aligned}$$

□

MaTEX

LÍMITES



Ejercicio 19(f)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\tan x - \operatorname{sen} x} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 + \tan^2 x) - \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2 \tan x (1 + \tan^2 x) + \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2(1 + \tan^2 x)^2 + 4 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) + \cos x}$$

$$= \frac{1}{3}$$

□

MaTEX

LÍMITES



Ejercicio 19(g)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} &= \boxed{\frac{0}{0}} \\ &\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{0}{0} \\ &\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□



MaTeX

LÍMITES





Ejercicio 19(h)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} &= \boxed{\frac{0}{0}} \\ &\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x^2 \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \end{aligned}$$

Este límite no existe pues no existe $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$. Es decir L'Hôpital no resuelve el límite. Si volvemos al inicio y le escribimos como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x}{\operatorname{sen} x}}_1 \cdot \underbrace{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}_1 = 1$$

□

MaTeX

LÍMITES





Ejercicio 19(i)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x &= \boxed{1^\infty} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\cos \frac{1}{x} - 1 \right)} \end{aligned}$$

hallamos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\cos \frac{1}{x} - 1 \right) &= \boxed{\infty \cdot 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \\ &\stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \end{aligned}$$

solución $e^0 = 1$

□

MaTeX

LÍMITES



Ejercicio 19(j)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}} &= \boxed{1^\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot (\cos 2x - 1)\end{aligned}$$

hallamos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x} &= \boxed{\frac{0}{0}} \\ \stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \operatorname{sen} 2x}{1} &= 0\end{aligned}$$

solución $e^0 = 1$

□



MaTeX

LÍMITES



Soluciones a los Tests

Solución al Test:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{200}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$

pues

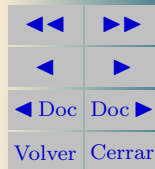
$$e^x \gg x^a \quad a > 0$$

Final del Test



MaTeX

LÍMITES



Índice alfabético

infinitésimos

álgebra de, 5

equivalentes, 6

orden de, 5

definición, 4

Sustitución de, 17

infinitos, 19

comparación de,, 19

definición de, 19

exponencial, 21

logarítmico, 21

orden de,, 19

potencial, 21

Principio de Sustitución, 17

regla de L'Hôpital

caso $0/0$, 33

caso $0 \cdot \infty$, 36

caso $\infty - \infty$, 37

caso ∞/∞ , 35

límites por la, 33

Tabla de equivalencias, 10



MaTeX

LÍMITES

