	COLEGIO ITALICA Arguijo 5-7 SEVILLA 41003	MATEMATICAS II 2º BACHILLERATO EVAL: 1ª FECHA: 3-11-2016	
NOMBRE			

Ejercicio 1: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}$**,**

a) **Demuestra que se verifica la igualdad** $A^3=-I$ **, siendo I la matriz identidad de orden 3.**

$$A^2=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-I$$

b) **Justifica que A es invertible y halla su inversa.**

$$|A|=15+12-16-12=-1\neq 0\rightarrow \exists A^{-1}$$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&4&-3\\1&4&-3\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&-4&-4\\1&3&3\end{pmatrix}}$$

c) **Calcula razonadamente** A^{100}

$$A^3=-I$$
$$A^4=A^3\cdot A=-I\cdot A=-A$$
$$A^5=A^4\cdot A=-A\cdot A=-A^2$$
$$A^6=A^5\cdot A=-A^2\cdot A=-A^3=I$$

$-----------$

$100 \quad \underline{|6}$

$4 \quad 16 \qquad A^{100}=\left(A^6\right)^{16}\cdot A^4=I\cdot A^4=A^4=-A$

Por tanto

$$A^{100}=-A=\boxed{\begin{pmatrix}0&-3&-4\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}}$$

	COLEGIO ITALICA Arguijo 5-7 SEVILLA 41003	MATEMATICAS II 2º BACHILLERATO EVAL: 1ª FECHA: 3-11-2016	
NOMBRE			

Ejercicio 2: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & t+1 & t-1\\ -2t-1 & 0 & t+3\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$,

a) **Calcula el rango de A según los diferentes valores del parámetro t.**

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & t+1 & t-1\\ -2t-1 & 0 & t+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & t-1 & t-1\\ -2t-1 & 2t+1 & t+3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}t-1 & t-1\\ 2t+1 & t+3\end{vmatrix}=$$

$$(t-1)[t+3-2t-1]=(t-1)(-t+2)=0\rightarrow\begin{cases}t=1\\ t=2\end{cases}$$

$$Si\ \ t\neq 1\wedge 2\rightarrow rg(A)=3$$

$\underline{t=1|}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ \boxed{2} & \boxed{2} & 0\\ \boxed{-3} & \boxed{0} & 4\end{pmatrix}\quad\begin{vmatrix}2 & 2\\ -3 & 0\end{vmatrix}=6\neq 0\rightarrow rg(A)=2$$

$\underline{t=2|}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ \boxed{2} & \boxed{3} & 1\\ \boxed{-5} & \boxed{0} & 5\end{pmatrix}\quad\begin{vmatrix}2 & 3\\ -5 & 0\end{vmatrix}=15\neq 0\rightarrow rg(A)=2$$

$Por\ \ \tan to:$

$$\boxed{\begin{array}{l}Si\ \ t\neq 1\wedge 2\rightarrow rg(A)=3\\ Si\ \ t=1\vee 2\rightarrow rg(A)=2\end{array}}$$

b) **Para $t = 1$, resuelve el sistema homogéneo $A\cdot X=0$**

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\rightarrow\left.\begin{array}{rl}x+y & =0\\ -3x+4z & =0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{rl}y & =-x\\ z & =\dfrac{3x}{4}\end{array}\right\}\boxed{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=-\lambda\\ z=\dfrac{3\lambda}{4}\end{array}}_{\lambda\in\mathbb{R}}$$

	COLEGIO ITALICA Arguijo 5-7 SEVILLA 41003	MATEMATICAS II 2º BACHILLERATO EVAL: 1ª FECHA: 3-11-2016	
NOMBRE			

<u>Ejercicio 3:</u> Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A+B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix} \quad y \quad A-B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

a) **Halla las matrices** $(A+B)\cdot(A-B)$ **y** A^2-B^2

$$(A+B)\cdot(A-B)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}6 & 20\\ 4 & 16\end{pmatrix}}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$2A=\begin{pmatrix}6 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix}\rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 15\\ 5 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}13 & 16\\ 3 & 9\end{pmatrix}}$$

	COLEGIO ITALICA Arguijo 5-7 SEVILLA 41003	MATEMATICAS II 2º BACHILLERATO EVAL: 1ª FECHA: 3-11-2016	
NOMBRE			

b) Resuelve la ecuación matricial $XA-XB-(A+B)^t=2I$

$$XA-XB-(A+B)^t=2I \to X(A-B)=2I+(A+B)^t$$

$$X(A-B)\cdot(A-B)^{-1}=\left[2I+(A+B)^t\right]\cdot(A-B)^{-1}$$

$$\boxed{X=\left[2I+(A+B)^t\right]\cdot(A-B)^{-1}}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}=D \quad y \quad A-B=\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}=E$$

$$\boxed{X=\left[2I+D^t\right]\cdot E^{-1}}$$

$\underline{E^{-1}}|$

$$|E|=4+4=8$$

$$Adj(E)=\begin{pmatrix}2&1\\-4&2\end{pmatrix}\to E^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&-4\\1&2\end{pmatrix}$$

$$X=\left[2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&3\\2&2\end{pmatrix}\right]\cdot\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&-4\\1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}6&3\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-4\\1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}15&-18\\8&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}15/8&-9/4\\1&0\end{pmatrix}}$$

	COLEGIO ITALICA Arguijo 5-7 SEVILLA 41003	MATEMATICAS II 2º BACHILLERATO EVAL: 1ª FECHA: 3-11-2016	
NOMBRE			

<u>Ejercicio 4:</u> Sabiendo que el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **es 2, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:**

a) $\det(3A)=3^3\cdot|A|=\boxed{54}$

b) $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{|A|}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$

c) $$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}=3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-3\cdot 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\boxed{-12}$$

d) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}+\cancel{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}^{F_2=2F_1}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\boxed{-2}$$